

Threshold Pion-Elektroproduktion bei großen Energieüberträgen



Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Naturwissenschaftlichen Fakultät II - Physik
der Universität Regensburg

vorgelegt von
Andreas Peters
aus Pentling
Februar 2008

Promotionsgesuch eingereicht am 27.02.08
Promotionskolloquium am 15.04.08



Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. V. M. Braun

Prüfungsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. A. Penzkofer
1. Gutachter: Prof. Dr. V. M. Braun
2. Gutachter: Prof. Dr. A. Schäfer
Weiterer Prüfer: Prof. Dr. K. Richter

Abbildungsverzeichnis

3.1	Dargestellt ist $-q^2$ als Funktion von $2m_N q_0$. Die blaue Linie entspricht für exakt $W = m_N$ der elastischen Elektron-Proton Streuung, während die rote Linie den kinematischen Bereich der Threshold-PEp darstellt. Die grüne Linie markiert den Bereich der Photoproduktion ($q^2 = 0$).	21
3.2	Darstellung der chiralen Rotation, bei der das auslaufende Pion durch einen Kommutator mit der axialen Ladung Q_5^a ersetzt wird. Für $W = W_{th} = m_N + m_\pi$, also auf der Threshold, verschwinden alle höheren Wellen und das Diagramm ist der einzig verbleibende Beitrag. . . .	21
3.3	Darstellung der P-Wellen Beiträge, welche die Emission des Pions beschreiben.	22
4.1	Linke Abbildung: Das F_2^n/F_2^p Verhältnis [9] aus tiefinelastischen Proton und Deuteron Messungen [37] mit a) einem Modell, welches auf der Fermibewegung der Nukleonen im Kern ruht (Bodek et al. [38]), b) einem Modell, welches Bindungseffekte beinhaltet (Melnitchouk und Thomas [39]), und c) ein weiteres Modell, welches in der Literatur das "nuclear density model" genannt wird und dabei ebenso Bindungseffekte berücksichtigt (Frankfurt und Strikman) [40, 41, 42]. Rechte Abbildung: Korrespondierende Daten des JLAB zu F_2^n/F_2^p [9]. Der gelbe Balken entsteht hauptsächlich durch Modell-Unsicherheiten in der Extraktion von F_2^n aus Deuteron Daten. Die Fermibewegung der Nukleonen ist speziell für große x ganz besonders stark.	33
4.2	Weltdaten zu den polarisierten Strukturfunktionen g_1 und g_2 [43], siehe u.a. [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51].	34
4.3	Weltdaten zu den Spin-Asymmetrien A_1 und A_2 und verschiedene theoretische Vorhersagen und Fitfunktionen, siehe [43, 52] in Verbindung mit u.a. [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51]. . .	35
4.4	Darstellung der FSI-Beiträge aus der Rückstreuung des produzierten Pions mit dem auslaufenden Nukleon.	38
5.1	Schematische Darstellung des harten Streuvorgangs am Beispiel von $\gamma^* N \rightarrow N$. Dabei zerlegt sich die Amplitude in einen nicht-perturbativen (Amplituden) und einen perturbativen Anteil (Streukernel).	42
5.2	Struktur der QCD Faktorisierung von Baryon Formfaktoren.	43
5.3	Schematische Darstellung des harten Streuvorgangs in der PEp. Entsprechend (5.2) zerlegt sich dabei die Amplitude in einen nicht-perturbativen (Amplituden) und einen perturbativen Anteil (Streukernel).	43
8.1	LCSR Ergebnisse für die elektromagnetischen Formfaktoren (Links: $G_M/(\mu_p G_{Dipole})$ vs. Q^2 ; Rechts: $\mu_p G_E/G_M$ vs. Q^2) des Protons [1, 67]. Die Kurven wurden mit Hilfe des BLW Modells (durchgezogene Linie), des asymptotischen Modells (gestreifte Linie) und des CZ Modells (gepunktete Linie) der Nukleon DAs errechnet. Die roten Datenpunkte wurden unter Verwendung der Polarisationstransfer-Methodik gemessen. Die blauen sind mit Hilfe einer Rosenbluth Separation erreicht worden. Für detailliertere Angaben zu den Punkten, siehe [1].	67

8.2	<i>LCSR Ergebnisse für die elektromagnetischen Formfaktoren (Links: $G_M/(\mu_n G_{\text{Dipole}})$ gegen Q^2; Rechts: $\mu_n G_E/G_M$ vs. Q^2) des Neutrons [1, 67]. Die Kurven wurden mit Hilfe des BLW Modells (durchgezogene Linie), des asymptotischen Modells (gestreifte Linie) und des CZ Modells (gepunktete Linie) der Nukleon DAs errechnet. Die roten Datenpunkte wurden unter Verwendung der Polarisations-transfer-Methodik gemessen. Die blauen sind mit Hilfe einer Rosenbluth Separation erreicht worden. Für detailliertere Angaben zu den Punkten, siehe [1].</i>	68
8.3	<i>LCSR Ergebnisse (durchgezogene Linie) für das Verhältnis $\sqrt{Q^2} F_2^p/(F_1^p 1.79)$, siehe [67, 1]. Rote Symbole: Experimentelle Daten erhalten durch Polarisations-transfer. Blaue Symbole: Experimentelle Daten erhalten durch eine Rosenbluth Separation. Für detailliertere Angaben zu den Punkten, siehe [1].</i>	68
9.1	<i>Schematische Struktur der Polterme in der Korrelationsfunktion (8.1)</i>	71
9.2	<i>Schematische Struktur der LCSR für die PEP.</i>	72
9.3	<i>Darstellung der Summenregeln bei denen für $W_{\text{th}} = m_N + m_\pi$ nur der Term der chiralen Rotation bleibt.</i>	73
9.4	<i>PEP Amplituden auf der Threshold, (3.13) normalisiert auf den axialen Nukleon Formfaktor: $\pi^+ n$ (durchgezogene blaue Kurven) und $\pi^0 p$ (gestrichelte rote Kurven). Die Ergebnisse wurden unter Verwendung des BLW Modells [1] der Nukleon DAs erreicht.</i>	76
10.1	<i>Bild a): Darstellung des Kontaktterms; im chiralen Limes $m_\pi \rightarrow 0$ und nahe der Threshold kann er mit Hilfe einer chiralen Rotation des Ioffe Stromes dargestellt werden. Bild b): Darstellung des semi-disconnected Terms; das Pion fliegt am Nukleon vorbei. Bild c): Darstellung des semi-disconnected Terms für die Emission eines Pions im Endzustand.</i>	80
10.2	<i>Die Verhältnisse der LCSR Vorhersagen der verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi^0 p}$ (linker Plot) und $G_2^{\pi^0 p}$ (rechter Plot) zu den entsprechenden Ergebnissen im Soft-Pion Limes (3.46). Die durchgezogene und die gestrichelte Linie korrespondieren zu der Berechnung mit den Borelparametern $M^2 = 2 \text{ GeV}^2$ und $M^2 = 1 \text{ GeV}^2$.</i>	81
11.1	<i>Das LCSR-basierte Grundmodell für die beiden verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi^+ n}$ und $G_2^{\pi^0 p}$ (linke Plots) und entsprechende Vorhersagen für $G_1^{\pi^0 p}$ und $G_2^{\pi^+ n}$ (rechte Plots). Die durchgezogenen Linien entsprechen den Ergebnissen der Summenregeln unter Verwendung der Fitfunktionen (11.4). Während die gestrichelten Linien dem reinen LCSR Resultat unter Verwendung des BLW Satzes an nicht-perturbativen Parametern entsprechen.</i>	87
11.2	<i>Das LCSR-basierte Grundmodell für die beiden verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi^0 n}$ und $G_2^{\pi^0 n}$ (linke Plots) und entsprechende Vorhersagen für $G_1^{\pi^- p}$ und $G_2^{\pi^- p}$ (rechte Plots). Die durchgezogenen Linien entsprechen den Ergebnissen der Summenregeln unter Verwendung der Fitfunktionen (11.4). Während die gestrichelten Linien dem reinen LCSR Resultat unter Verwendung des BLW Satzes an nicht-perturbativen Parametern entsprechen.</i>	88
11.3	<i>Das LCSR-basierte Modell (durchgezogene Linien) für die Q^2 Abhängigkeit der elektrischen und longitudinalen Partialwellen auf der Threshold von E_{0+} und L_{0+}, (4.27), in Einheiten von GeV^{-1}, normiert auf die Dipolformel (11.5). Die grünen Punkte (■, ▲, ★) sind Ergebnisse von MAID07 und die blauen Werte (■, ▲, ★) sind Ergebnisse der GWU (George-Washington University) Kollaboration aus 2007. Letztere wollen wir im Folgenden GWU07 nennen. Geplotted sind Punkte für $W = 1083 \text{ MeV}$ (■), $W = 1093 \text{ MeV}$ (▲) und $W = 1103 \text{ MeV}$ (★).</i>	89

11.4	<i>Theoretische Vorhersagen für den S-Wellen Beitrag von $Q^6\sigma$ aufgetragen gegen Q^2 unter Verwendung der Formfaktor-Parametrisierung (11.4) im Vergleich zum S-Wellen Beitrag zum totalen Streuquerschnitt $Q^6\sigma$. Linker Plot entspricht $Q^6\sigma_{\gamma^*p \rightarrow \pi^0p}$ (in Einheiten von $\mu b \times GeV^6$) und rechts ist entsprechend $Q^6\sigma_{\gamma^*p \rightarrow \pi^+\pi^-}$ dargestellt.</i>	90
11.5	<i>Die Strukturfunktion $F_2^p(W, Q^2)$ als Funktion von W^2 skaliert durch einen Faktor 10^3 verglichen mit den SLAC E136 Daten [76] bei einem durchschnittlichen Wert von $Q^2 = 7.14 GeV^2$ (linker Plot) und $Q^2 = 9.43 GeV^2$ (rechter Plot).</i>	90
11.6	<i>Linker Plot: Die S-Wellen (durchgezogene Linie) vs. die P-Wellen (gestrichelte Linie) Beiträge zu der Strukturfunktion $F_2^p(W, Q^2)$ als eine Funktion von W^2 für $Q^2 = 7.14 GeV^2$. Rechter Plot: Die Beiträge des π^0p Endzustands zu der Strukturfunktion $F_2^p(W, Q^2)$ als eine Funktion von W^2 für $Q^2 = 3 GeV^2$ (obere Kurve) und $Q^2 = 9 GeV^2$ (untere Kurve).</i>	91
11.7	<i>Linker Plot: Der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma_{\gamma^*p \rightarrow \pi^0p}/d\Omega_\pi$ (in μb) als eine Funktion von $\cos\theta$ für $\phi_\pi = 135$ grad für $Q^2 = 4.2 GeV^2$ und $W = 1.11 GeV$. Rechter Plot: Der integrierte Streuquerschnitt $Q^6\sigma_{\gamma^*p \rightarrow \pi^0p}$ (in Einheiten von $\mu b \times GeV^6$) als eine Funktion von Q^2 für $W = 1.11 GeV$ (untere Kurve) und $W = 1.15 GeV$ (obere Kurve).</i>	91

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
1.1	In dieser Arbeit	11
2	Einführung und Grundlagen	13
2.1	Das Partonmodell	13
2.2	Verschiedene Modellvorhersagen für große x	16
2.3	Der EMC Effekt im Kern	17
2.4	Zusammenfassung des Kapitels	18
3	Pion-Elektroproduktion bei kleinen Energieüberträgen	19
3.1	Kinematik der Pion-Elektroproduktion	19
3.2	Multipolzerlegung der Amplitude	22
3.3	Entwicklungen für kleine Q^2	24
3.3.1	Das Soft-Pion Theorem	24
3.3.2	Entwicklung von $E_{0+}^{\pi N}$ für kleine Q^2 in der CHPT	26
3.4	Low-Energy Theorems (LETs)	27
3.5	Zusammenfassung des Kapitels	28
4	Allgemeine Berechnungen zur Pion-Elektroproduktion	31
4.1	Strukturfunktionen und Asymmetrien	31
4.2	Die Streuquerschnitte der Pion-Elektroproduktion	34
4.3	Verbindung zu $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$ in der PWA	38
4.4	Zusammenfassung des Kapitels	39
5	Pion-Elektroproduktion bei großen Energieüberträgen	41
5.1	Faktorisierung in der Pion-Elektroproduktion	41
5.2	Zusammenfassung des Kapitels	45
6	Nukleon Distributionsamplituden	47
6.1	Allgemeine Definition der DAs	47
6.2	Klassifikation und Symmetrierelationen	50
6.3	Helizität	52
6.4	Zusammenfassung des Kapitels	52
7	Pion-Nukleon Distributionsamplituden	55
7.1	Pion-Nukleon DAs in Twist-3	55
7.2	Höhere Twists	57
7.3	Zusammenfassung des Kapitels	58

8	LCSR zu den Nukleon Formfaktoren	59
8.1	Eine kurze Einführung	59
8.2	LCSR zu F_1 und F_2 für den Ioffe Strom	65
8.3	Numerische Ergebnisse zu den Formfaktoren	66
8.4	Zusammenfassung des Kapitels	67
9	Ein Grundmodell für $G_1^{\pi N}(Q^2)$ und $G_2^{\pi N}(Q^2)$	69
9.1	Summenregeln im Soft-Pion Limit	69
9.2	LCSR für $G_1^{\pi N}(Q^2)$ und $G_2^{\pi N}(Q^2)$	72
9.3	Numerische Ergebnisse zum Grundmodell	76
9.4	Zusammenfassung des Kapitels	77
10	Das Gesamtmodell für die Formfaktoren $G_i^{\pi N}$	79
10.1	Summenregeln für $G_1^{\pi^+ n}$ und $G_2^{\pi^0 p}$	79
10.2	Summenregeln zu den $G_1^{\pi^- p}$ und $G_2^{\pi^0 n}$	82
10.3	Zusammenfassung des Kapitels	84
11	Numerische Resultate	85
11.1	Ergebnisse zu $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$	85
11.2	Ergebnisse zu den Strukturfunktionen und Streuquerschnitten	89
11.3	Zusammenfassung des Kapitels	92
12	Zusammenfassung und Ausblick	93
12.1	Ausblick	96
A	Herleitung der Strukturfunktionen	99
B	Fierztransformation	103
C	Nukleon Distributionsamplituden	107
D	Die $O(x^2)$-Korrekturen zu den Nukleon DAs	111
E	Pion-Nukleon DAs der höheren Twists	115
E.1	$n\pi^+$ DAs	115
E.2	$p\pi^0$ DAs	117
E.3	$p\pi^+$ DAs	117
E.4	$O(x^2)$ -Korrekturen	118
E.4.1	$\mathcal{V}_1^{\pi N, M}$ Korrekturen	118
E.4.2	$\mathcal{A}_1^{\pi N, M}$ Korrekturen	119
	Literaturverzeichnis	119
	Danksagung	124

1

Einleitung

Schon immer wollte der Mensch ergründen, was die Welt im Innersten zusammenhält. Bereits in der Antike versuchten griechische Philosophen diesem Geheimnis auf die Spur zu kommen. Damals wusste natürlich noch niemand aus welchen Bausteinen die Materie im Detail aufgebaut ist. Vielmehr setzte sich damals die Annahme durch, dass Materie durch unteilbare Bausteine aufgebaut sein muss. Der Begriff des Atoms war geboren. Ein Baustein also, der nach damaligem Verständnis weder zerlegt werden kann, noch aus anderen Bausteinen aufgebaut ist.

Über die Jahrtausende hielt sich dieses Bild aufrecht. Erst in den letzten Jahrhunderten wurden signifikante Fortschritte im Verständnis der Physik auf einer makroskopischen Skala erzielt. In diesem Zusammenhang seien berühmte Physiker wie Johannes Kepler (1571-1630) oder Isaac Newton (1643-1722) erwähnt. Besonders die Arbeiten von James Clerk Maxwell (1831-1879) brachten Licht ins Dunkel in Bezug auf das Verständnis der elektromagnetischen Kraft und dem Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld. Bezüglich der mikroskopischen Struktur der Materie verblieb man jedoch bei dem in der Antike geprägten Bild der Materie. Es setzte sich Anfang des letzten Jahrhunderts lediglich die Erkenntnis durch, dass das Atom aus einem Kern und einer dazugehörigen Hülle besteht. Vor allem durch Streuexperimente im 20. Jahrhundert wurde diese Vorstellung bestätigt. Ein Forscherteam um den Briten Lord Ernest Rutherford (1871-1937) streute Alphateilchen (zwei Neutronen plus zwei Protonen) an einer Goldfolie. Die Resultate ließen Rutherford auf die Existenz kleiner, dichter und positiv geladener Kerne im Inneren der Atome schließen. Im Jahre 1920 nennt Rutherford den Kern des Wasserstoffatoms *Proton*. Nach und nach setzt sich die Vorstellung durch, dass jeder Atomkern aus den einzelnen Nukleonen (Proton oder Neutron) aufgebaut ist. Bis zu diesem Zeitpunkt ging man davon aus, dass die Nukleonen die kleinsten unteilbaren Kernbausteine seien.

Erst mit dem Betrieb von Hochenergiebeschleunigern wie z.B. dem SLAC begann sich das Bild über die Nukleonen grundlegend zu ändern. 1969 wurden am SLAC Protonen mit energiereichen Elektronen beschossen. Dabei zeigte sich eine innere Struktur der Protonen. Zunächst ist man vorsichtig, dabei Quarks zu vermuten. Während der nächsten Jahre sollte sich dieses Modell in der Physik jedoch etablieren. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Physiker Jerome I. Friedman (*1930), Henry W. Kendall (1926-1999) und Richard E. Taylor (*1929) 1990 den Physik-Nobelpreis für diese bahnbrechende Entdeckung erhielten. Die interne Struktur dieser Nukleonen besteht also aus Quarks, welche Spin und Parität auf das Nukleon

übertragen. Bisherige tiefinelastische Messungen haben ergeben, dass ein Nukleon aus grundsätzlich drei Quarks aufgebaut ist und Protonen und Neutronen somit Spin $1/2$ besitzen, damit also fermionischen Charakter haben. Die Austauschteilchen unter den Quarks sind die Gluonen, welche über die starke Wechselwirkung untereinander energetisch wechselwirken. Erste Hinweise auf Gluonen lieferten Beschleunigerdaten von PETRA bei DESY aus 1979. Experimente im Jahr 1989 von SLAC und DESY bestätigten die Vermutung,

Familie	1	2	3	el. Ladung
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$2/3$ $-1/3$
Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$	0 -1

Tabelle 1.1: *Klassifikation der Elementarteilchen im Standardmodell*

	Eichgruppe	Eichboson
Elektromagnetische WW.	$U(1)$	Photon γ
Schwache WW.	$SU(2)$	W^+, W^-, Z^0
Starke WW.	$SU(3)$	8 Gluonen

Tabelle 1.2: *Eichgruppen und die dazu korrespondierenden fundamentalen Wechselwirkungen des Standardmodells*

dass es nur drei Quark-Familien gab. Bis zu diesem Zeitpunkt fehlte jedoch noch der entsprechende Nachweis des t-Quarks aus der dritten Familie, siehe Abb. 1.1. 1995 gelang dann eine entsprechende experimentelle Bestätigung am Fermilab-Beschleuniger Tevatron. Dabei ergab sich jedoch eine Masse des t-Quarks in der Größenordnung eines Goldatoms. Der Grund dafür ist bis zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht geklärt. Die letzte große experimentelle Entdeckung stammt aus dem Jahr 2000 und wurde ebenso am Fermilab durchgeführt. Erstmals gelang der Nachweis des τ -Neutrinos. Damit war das *Standardmodell* in der heutigen Form komplett.

Innerhalb des *Standardmodells* existieren vier verschiedene Kräfte oder Wechselwirkungen. Zum einen die elektromagnetische Kraft und zum anderen die schwache und die starke Wechselwirkung. Die entsprechende Theorie für letztere wird Quantenchromodynamik (QCD) genannt. Die vierte im Bunde der Fundamentalkräfte ist die Gravitation. Sie ist im Vergleich zu den anderen Kräften von vernachlässigbarer Stärke. Gerade das ist jedoch überraschend und Gründe dafür sind nicht offensichtlich. In den letzten Jahren haben die Stringtheorie und in diesem Zusammenhang supersymmetrische Modelle (SUSY) vielversprechende Ansätze unternommen, dieses Phänomen zu erklären.

Für verschiedene Beschleunigerenergien existieren grundsätzlich unterschiedliche Theoriemodelle. Für sehr kleine Energieüberträge von $Q^2 \sim 0.2 \text{ GeV}^2$ hat sich die chirale Störungstheorie (CHPT) etabliert. Ausgangspunkt ist eine Lagrangedichte, welche die Wechselwirkung zwischen Nukleon und dem leichtesten stabilen Teilchen bestehend aus zwei Quarks, dem Pion, beschreibt. Hauptpunkt der Argumentation ist der *Goldstone*-Charakter des Pions, welcher es ermöglicht, das Pion als *Störungsparameter* in der Rechnung zu betrachten. Die CHPT entwickelte sich in den letzten Jahren wegen der guten Übereinstimmung mit dem Experiment sehr schnell und wurde so zu einer starken Theorie innerhalb der QCD bei kleinen Energien.

Aufgrund der Entwicklung leistungsfähiger Rechner hat sich in jüngster Vergangenheit die *Gitter-QCD* als mächtiges Werkzeug in der theoretischen Physik etabliert. Für Energien bis zu einer Skala von ($\mu \sim 1 \text{ GeV}^2$) werden Observablen mit Hilfe von Computeralgorithmen berechnet. Hauptmerkmal ist die Abbildung der vierdimensionalen Raumzeit und deren Diskretisierung auf einem Gitter. Dementsprechend gehört die *Gitter-QCD* zum Bereich der *nicht-perturbativen* QCD-Methoden.

Für größere Energieüberträge brechen die beiden oben genannten Theorien allerdings zusammen. Prinzipiell

gibt es zwei Klassen von Streuexperimenten: Inklusive und exklusive Streuprozesse.

Bei inklusiven Streuprozessen wird über alle ausgehenden Zustände des hadronischen Systems summiert. Grundsätzlich ist dies experimentell mittlerweile gut durchführbar, da keine speziellen Anforderungen an die Auflösung der Detektoren gestellt wird. Deshalb waren Daten darüber schon vor einigen Jahrzehnten verfügbar. Anders verhält es sich mit der zweiten Klasse an hadronischen Streuexperimenten, den exklusiven Prozessen. Dabei werden alle Endzustände nach der Streuung identifiziert und charakterisiert. Tatsächlich stellt dies ganz besondere Herausforderungen an die Messinstrumente dar, da die Auflösung innerhalb der Messkammer sehr hoch sein muss. Deshalb sind diese Prozesse sowohl experimentell als auch theoretisch hochinteressant. Der prominenteste exklusive Streuprozess ist die elastische Elektron-Proton Streuung der Form

$$e(l) + p(P) \rightarrow e(l') + p(P'). \quad (1.1)$$

Dabei streut ein Elektron über ein (virtuelles) Photon mit dem Proton. Im Endzustand können dann die beiden auslaufenden Teilchen, das Elektron und das Proton, gemessen werden.

Ein weiterer exklusiver Streuprozess ist die Pion-Elektroproduktion (PEp). Dabei wird wiederum ein Elektron mit einem Proton gestreut. Im Endzustand wird jedoch ein weiteres Teilchen produziert, das Pion. Prinzipiell schreibt sich der Prozess wie

$$e(l) + N(P) \rightarrow e(l') + \pi(k) + N'(P'). \quad (1.2)$$

Über jenen Prozess, seine Eigenschaften und Auswirkungen auf die Physik, handelt die folgende Arbeit. Es wird im Detail erklärt, warum gerade die PEp unter der Vielzahl an exklusiven Streuprozessen als hochinteressant angesehen werden kann und inwiefern theoretische Modelle in der Lage sind, aus der Reaktion physikalische Informationen zu extrahieren.

1.1 In dieser Arbeit

Im Einzelnen ist der Aufbau der Arbeit wie folgt:

- Im Einführungskapitel werden die Grundlagen gebildet. Zuerst wird das wohl bekannteste und mit Abstand berühmteste Kernmodell vorgestellt. Innerhalb der Literatur ist dabei vom Partonmodell die Rede. Nach Vorstellung der entsprechenden fundamentalen Eigenschaften des Partonmodells konzentrieren wir uns im Weiteren auf die Physik bei großen Bjorken x . Anhand unterschiedlicher Modellvorhersagen werden Werte von charakteristischen Größen (Asymmetrien, Strukturfunktionen) im Limes von $x \rightarrow 1$ vorgestellt und mit Messdaten unterschiedlicher Experimente verglichen. Da besonders bei großen x die Fermi-Bewegung der Kern-Konstituenten ausgeprägt ist, sind experimentelle Messungen mit signifikanten Unsicherheiten behaftet.
- Kap. 3 führt innerhalb des ersten Abschnitts in die grundlegende Kinematik der PEp ein. Nach Einführung einer Multipolzerlegung der Feynmanamplitude der PEp konzentrieren wir uns auf die PEp bei kleinen Energien.
- Im Anschluss daran werden in Kap. 4 physikalische Größen wie Streuquerschnitte und Strukturfunktionen im Allgemeinen berechnet.
- In Zusammenhang mit Kap. 5 betrachten wir die PEp bei großen Energieüberträgen und werden erkennen, dass die Physik sich in solch harten Energieregimen, im Gegensatz zur niederenergetischen PEp, signifikant ändert.
- In Kap. 6 wird zuerst in die Grundlagen über Nukleon Distributionsamplituden (DAs) eingeführt. Im Anschluss daran wird in Kapitel 7 das Modell auf Pion-Nukleon DAs ausgeweitet.

-
- In Kap. 8 werden die Ergebnisse zu den Lichtkegelsummenregeln (LCSR) aus [1] vorgestellt. Dabei wird vor allem die allgemeine Idee der LCSR und deren Anwendung auf Nukleon Formfaktoren erklärt.
 - Im Anschluss daran bildet das Kapitel 9 zusammen mit Kap. 10 den theoretischen Hauptteil der Arbeit. Darin wird ein LCSR-basiertes Modell für die PEP eingeführt.
 - Kap. 11 bildet dann geschlossen die numerischen Ergebnisse und deren Vergleich mit den experimentellen Werten ab.

Basierend auf den Veröffentlichungen [2, 3, 4, 5, 6] wird in den nachfolgenden Kapiteln die PEP unter Verwendung eines LCSR Ansatzes vorgestellt. Damit wollen wir erstmals die PEP im Rahmen von QCD LCSR diskutieren.

2

Einführung und Grundlagen

2.1 Das Partonmodell

Seit Jahrzehnten wird nun die Nukleonstrukturfunktion untersucht. Bisher gibt es eine unglaubliche Fülle an Daten dazu, insbesondere für kleine Q^2 . Ziel solcher Messungen ist es, mehr über die Struktur des Nukleons in Erfahrung zu bringen. Dabei stellen sich die fundamentalen Fragen, ob das Nukleon wirklich nur aus drei Quarks aufgebaut ist, wie die Quarks miteinander wechselwirken, wie viele Quarkarten sich im Nukleon eigentlich befinden etc. .

Das einfachste Modell zur Beschreibung von Nukleonen ist das wohlbekannte Partonmodell. Innerhalb des Modells werden die Quarks als nicht miteinander wechselwirkende, punkartige Teilchen angenommen. Jedes Quark besitzt den Impulsanteil x des gesamten Nukleons. Die Strukturfunktionen können mit Hilfe der Partonverteilungen ausgedrückt werden.

Man erhält den wohlbekannten Ausdruck:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x), \quad (2.1)$$

wobei i der Typ des Partons ist und f_i jeweils für die Partonverteilungsfunktion des Partons i steht. Nach unzähligen Experimenten ist nun klar, dass es sich bei den $f_i(x)$ um nichts anderes als die Quarkverteilungsfunktionen handelt. Helizitätserhaltung in der elektromagnetischen Kopplung führt auf die berühmte Callan-Cross Beziehung, welche F_1 und F_2 in Beziehung zueinander setzt,

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = x \sum_i e_i^2 f_i(x). \quad (2.2)$$

Somit können wir die Strukturfunktion durch die Quarkverteilungsfunktionen explizit ausdrücken:

$$F_2^p(x) = x \left[\frac{4}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9} (d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9} (s(x) + \bar{s}(x)) \right], \quad (2.3)$$

wobei $(u(x), d(x), s(x))$ die Partonverteilungsfunktion des (u, d, s) -Quarks und die $(\bar{u}(x), \bar{d}(x), \bar{s}(x))$ die Verteilungsfunktion des $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ -Quarks darstellt. Unter Annahme von Ladungssymmetrie [7, 8]

$$d^n = u^p \equiv u, \quad u^n = d^p \equiv d \quad (2.4)$$

und von

$$\begin{aligned} u_s(x) &= \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = S(x), \\ u(x) &= u_v(x) + u_s(x), \\ d(x) &= d_v(x) + d_s(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ergibt sich für die Neutronstrukturfunktion

$$F_2^n(x) = x \left[\frac{4}{9}(d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9}(s(x) + \bar{s}(x)) \right]. \quad (2.6)$$

Des Weiteren errechnet sich der Valenzquarkanteil aus der Differenz von Quark- und Antiquarkverteilungsfunktion

$$\begin{aligned} u_v &= u - \bar{u} = u - \bar{u}_s = u - u_s, \\ d_v &= d - \bar{d} = d - \bar{d}_s = d - d_s, \\ s - \bar{s} &= s_s - \bar{s}_s = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Indem nun die Gleichungen (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) und (2.7) miteinander kombiniert werden, können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^p(x) &= \frac{1}{9} [4u_v + d_v] + \frac{4}{3} S, \\ \frac{1}{x} F_2^n(x) &= \frac{1}{9} [u_v + 4d_v] + \frac{4}{3} S, \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei S für den gesamten Seequarkanteil steht und dabei logarithmisch für $x \rightarrow 0$ in x wächst.

Experimente haben dabei festgestellt, dass es innerhalb des Definitionsbereichs von x , d.h. zwischen 0 und 1, bezüglich der Eigenschaften der Quarks erhebliche Unterschiede gibt. Besonders für kleine Impulsbruchteile x des Quarks im Nukleon, sind sogenannte See-Quarks dominant. Sie werden hauptsächlich durch Gluonbremsstrahlung und durch den Zerfalls eines Gluons in ein Quark-Antiquark Paar erzeugt. Valenzquarks hingegen bilden den fundamentalen Grundzustand des Nukleons ab.

Experimentell ist im Besonderen der Bereich für kleine und mittlere x , also für $x = 0.1 \dots 0.6$, erforscht, da in diesen Bereichen das Energiespektrum der Hochenergiebeschleuniger eindringen kann. Zwar ist für mittlere x der Valenzquarkanteil bereits signifikant und messbar, jedoch ist der Seequarkanteil immer noch dominant. Diese Situation ändert sich dramatisch, wenn wir zu größeren x gehen. Leider gibt es bisher nur wenige zuverlässige Daten für große Impulsbruchteile x . Im Besonderen fehlen fast vollständig Daten für $x > 0.94$. Gerade in dieser Region könnte die Valenzquarkstruktur hervorragend gemessen werden, da die Seequarkanteile für große x stark unterdrückt sind. Das heißt also, dass im Bereich $x \rightarrow 1$ sich kaum noch Beiträge der Gluonbremsstrahlung in den Messergebnissen finden.

Für $x \rightarrow 1$ können wir also schreiben, dass

$$\frac{F_2^n}{F_2^p} \longrightarrow \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v}. \quad (2.9)$$

Analog gilt für die polarisierten Strukturfunktionen g_1 und g_2 im Partonmodell

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sum_i e_i^2 \Delta q_i(x), \\ g_2(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1. DAS PARTONMODELL

wobei $\Delta q_i(x)$ die polarisierte Partonverteilungsfunktion des Partons i darstellt.

Von ganz besonderem Interesse ist nun vor allem das Verhältnis von d/u der Quarkverteilungsfunktionen und die Berechnung der Spin-Asymmetrien A_1 und A_2 für $x \rightarrow 1$, da, wie bereits erwähnt, wir uns darüber direkt Informationen über die Valenzquarks verschaffen können.

Für die Spin-Asymmetrien A_1 und A_2 definieren wir

$$A^{\parallel}(x, Q^2) = \frac{d^2\sigma^{\uparrow\downarrow} - d^2\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d^2\sigma^{\uparrow\downarrow} + d^2\sigma^{\uparrow\uparrow}} \quad (2.11)$$

und

$$A^{\perp}(x, Q^2) = \frac{d^2\sigma^{\rightarrow\uparrow} - d^2\sigma^{\rightarrow\downarrow}}{d^2\sigma^{\rightarrow\uparrow} + d^2\sigma^{\rightarrow\downarrow}}, \quad (2.12)$$

wobei \uparrow und \downarrow beschreiben, ob der Spin parallel und antiparallel zur Richtung des einfallenden Leptons ist. Für \rightarrow und \leftarrow ist der Nukleonspin transversal zur Polarisation des einfallenden Elektronstrahls.

Die beobachteten Asymmetrien (2.11) und (2.12) können mit den Photon-Absorptions Asymmetrien A_1 und A_2 in Verbindung gebracht werden:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sigma_{1/2}^T - \sigma_{3/2}^T}{\sigma_{1/2}^T + \sigma_{3/2}^T} = \frac{A^{\parallel}}{D(1 + \eta\xi)} + \frac{\eta A^{\perp}}{d(1 + \eta\xi)}, \\ A_2 &= \frac{\sigma^{LT}}{\sigma_{1/2}^T + \sigma_{3/2}^T} = \frac{\xi A^{\parallel}}{D(1 + \eta\xi)} + \frac{A^{\perp}}{d(1 + \eta\xi)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

wobei $\sigma_{1/2, (3/2)}^T$ den transversalen Photon-Absorptions Streuquerschnitt mit totaler Helizität 1/2 und 3/2 darstellt. Die Parameter D, d, η, ξ sind definiert mit:

$$\begin{aligned} D &= \frac{(1 - \epsilon E'/E)}{1 + \epsilon R}, \\ \epsilon &= 1 + 2[1 + Q^2/4m_N^2 x^2] \tan^2 \frac{\theta}{2}, \\ R + 1 &= \frac{(1 + 4m_N^2 x^2/Q^2) F_2}{2x F_1}, \\ \eta &= \frac{\epsilon Q}{E - \epsilon E'}, \\ d &= D \sqrt{\frac{2\epsilon}{(1 + \epsilon)}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

und

$$\xi = \frac{\eta(1 + \epsilon)}{2\epsilon}. \quad (2.15)$$

E bzw. E' ist die Energie des einlaufenden bzw. auslaufenden Elektrons. In der Literatur wird D als Depolarisationsparameter bezeichnet, $x = Q^2/(2Pq)$ und R ist üblicherweise mit $R = \sigma_L^{\gamma^*}/\sigma_T^{\gamma^*}$ definiert.

Für große Energien können die beiden Asymmetrien $A^{\parallel}(x, Q^2)$ und $A^{\perp}(x, Q^2)$ stark vereinfacht werden und wir haben

$$\begin{aligned} A^{\parallel} &\propto \frac{g_1(x, Q^2)}{F_1(x, Q^2)} \approx A_1, \\ A^{\perp} &\propto \frac{g_2(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2)} \approx A_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.2 Verschiedene Modellvorhersagen für große x

In den vergangenen Jahren wurden basierend auf verschiedenen Symmetriemodellen das Verhalten der Strukturfunktionen für große x untersucht. Dabei kam es zu unterschiedlichen Vorhersagen, was das d/u Verhältnis und der Asymmetrie betrifft. Zugrunde gelegt kann dabei folgendes einfaches Modell einer Nukleonwellenfunktion [9, 10, 11]

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |u \uparrow (ud)_{S=0}\rangle + \frac{1}{\sqrt{18}} |u \uparrow (ud)_{S=1}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |u \downarrow (ud)_{S=1}\rangle \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} |d \uparrow (uu)_{S=1}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |d \downarrow (uu)_{S=1}\rangle \end{aligned} \quad (2.17)$$

werden, wobei $q \uparrow \downarrow$ das jeweils aktive, streuende Quark bezeichnet. Die beiden $(qq)_S$ bilden ein Diquarksystem mit Spin S und sind Zuschauer im Streuprozess. Basierend auf theoretischen Überlegungen zur Symmetrienerhaltung haben wir $u = 2d$ und $\Delta u = -4\Delta d$ und man erhält die wohlbekannten und in der Literatur oft verwendeten Ergebnisse für $x \rightarrow 1$

$$R^{np} = F_2^n / F_2^p = \frac{2}{3}, \quad A_1^p = 5/9 \quad \text{und} \quad A_1^n = 0. \quad (2.18)$$

Da in der Natur die Symmetrie natürlich gebrochen ist, ergibt sich bei Dominanz von $S = 0$ (also bei einer Unterdrückung von $S = 1$)

$$R^{np} = F_2^n / F_2^p = \frac{1}{4}, \quad A_1^p = 1 \quad \text{und} \quad A_1^n = 1 \quad (2.19)$$

und umgekehrt sagt die perturbative QCD im Falle einer Unterdrückung von $S_Z = 1$

$$R^{np} = F_2^n / F_2^p = \frac{3}{7}, \quad A_1^p = 1 \quad \text{und} \quad A_1^n = 1 \quad (2.20)$$

voraus. Aus Gründen der Übersichtlichkeit, ist es sinnvoll die Ergebnisse in Tab. 2.1 darzustellen. Für

	u_v/d_v Verhältnis	F_2^n/F_2^p Verhältnis
SU(6) Symmetrie	1/2	2/3
Diquark $S = 1$ Unterdrückung	0	1/4
Diquark $S_Z = 1$ Unterdrückung	1/5	3/7

Tabelle 2.1: Zusammenfassende Darstellung der verschiedenen theoretischen Vorhersagen zu den Werten von u/d und F_2^n/F_2^p im Limes von $x \rightarrow 1$.

detaillierte theoretische Überlegungen sei an dieser Stelle u.a. auf die Arbeiten [10, 12, 13, 14] verwiesen.

2.3 Der EMC Effekt im Kern

In der realen Physik verhalten sich die einzelnen Partonen natürlich nicht voneinander unabhängig. Vielmehr treten sie über Gluonaustausch miteinander in Wechselbeziehung. Dabei sind in verschiedenen Bereichen in x unterschiedliche Effekte dominant. Erstmalig wurden entsprechende Messungen dazu am CERN im Rahmen der *European Muon Collaboration* unternommen. Sie ergaben zunächst, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen der freien Strukturfunktion, gemäß dem Partonmodell, und einer die reale Physik abbildenden Kern-Strukturfunktion besteht.

In diesem Zusammenhang ist von dem *EMC-Effekt* die Rede. Um den Effekt zu verdeutlichen, führen wir eine Hilfsgröße ein. Wir definieren eine gemittelte Strukturfunktion [15]:

$$\frac{1}{x}F_2^N(x) = \frac{1}{2x} \left[F_2^p(x) + F_2^n(x) \right]. \quad (2.21)$$

Im Allgemeinen ist dann das *Abschattungsverhältnis* mit

$$R^{abs} = \frac{F_2^A(x)}{AF_2^N(x)} \quad (2.22)$$

definiert. Mit Hilfe der Definition (2.22) ist es möglich, den EMC Effekt in Intervalle in x aufzuteilen.

- $x \geq 0.1$: In diesem Bereich ist die Kernstrukturfunktion im Vergleich zum A-fachen der Nukleonstrukturfunktion $F_2^N(x)$ verkleinert. Bildlich kann dies gut erklärt werden: Da die Nukleonen im Kern sehr dicht gepackt sind, können sie nicht alle an der Reaktion teilnehmen. Aus diesem Grund ist in der Literatur auch von *Abschattung* die Rede.
- Messungen zum EMC-Effekt haben ergeben, dass für $x = 0.1 \dots 0.2$ das Abschattungsverhältnis R^{abs} größer als 1 ist, also $R^{abs} > 1$. Dabei ist die Kernstrukturfunktion größer als das A-fache der gemittelten Nukleonstrukturfunktion. Es findet also *Anti-Abschattung* statt.
- Im Weiteren wurde für $0.8 \geq x \geq 0.2$ eine abermalige Reduktion von R^{abs} mit $R^{abs} < 1$ gemessen. In der Standardliteratur ist dabei von einem Bindungseffekt im Kern die Rede. Gewöhnlich spricht man dabei von *Binding*.
- Für experimentell große x im Bereich von $x > 0.8$ steigt R^{abs} wiederum rapide an. Die Erklärung hierfür ist die *Fermibewegung* der einzelnen Konstituenten im Kern, welche es für die einzelnen Nukleonen einfach gestaltet über z.B. Gluonaustausch miteinander in Wechselbeziehung zu gehen.

In den weiteren Kapiteln werden wir uns stets in hohen x -Bereichen von $x > 0.9$ aufhalten. Wegen der Fermi-Bewegung ist dabei in experimentellen Messungen stets mit großen Abweichungen zu rechnen. Ganz besonders bei der Extraktion der Neutronstrukturfunktion F_2^n aus Deuterium Daten, da die freie Neutronstrukturfunktion selbst nicht direkt gemessen werden kann. Man behilft sich also mit der direkten Messung von z.B. der Deuteronstrukturfunktion und extrahiert anschließend daraus die des Neutrons mittels unterschiedlicher Näherungen und Modelle. An diesem Punkt spielen Abweichungen verursacht durch den EMC-Effekt eine große Rolle.

Um Streuprozesse für sehr große x betrachten zu können, bietet sich idealerweise die PEP an. Kein anderer (exklusiver) Prozess macht es möglich, die Physik in diesem Bereich zu studieren. Tatsächlich existieren eine Reihe theoretischer Modelle, welche Vorhersagen für große x zulassen, wovon wir uns zwei näher ansehen werden. Zum einen ein Modell basierend auf sogenannten Faktorisierungstheoremen und zum anderen ein LCSR basiertes Modell zur Vorhersage physikalischer Größen, wie Strukturfunktionen und Streuquerschnitten. Letzteres Modell ist bekanntlich das zentrale Thema der Arbeit.

2.4 Zusammenfassung des Kapitels

Im Einführungskapitel wurden die Grundlagen gebildet. Zuerst wurde das wohl bekannteste und mit Abstand berühmteste Kernmodell vorgestellt. Innerhalb der Literatur ist dabei vom Partonmodell die Rede. Nach Vorstellung der entsprechenden fundamentalen Eigenschaften des Partonmodells, konzentrierten wir uns im Weiteren auf die Physik bei großen Bjorken x .

Für eine beispielhafte Wellenfunktion wurden unterschiedliche Vorhersagen in Bezug auf u.a. die Asymmetrie vorgestellt. Die Bestimmung des charakteristischen Wertes von F_2^n/F_2^p stellt experimentell jedoch, wegen der schwierigen Extraktion der Neutronstrukturfunktion, hohe Anforderungen, weil sie nicht direkt gemessen werden kann. Prinzipiell kann sie allerdings indirekt aus der Strukturfunktion des Deuterons extrahiert werden. Theoretische Modelle machen es anschließend möglich, die Werte für F_2^n zu bestimmen. Im Allgemeinen beeinflusst vor allem das **Fermi-Smearing** die Messung für sehr große x erheblich und lässt deshalb keine endgültigen und exakten Ergebnisse über z.B. F_2^n/F_2^p zu.

3

Pion-Elektroproduktion bei kleinen Energieüberträgen

Nach der Einführung der allgemeinen Kinematik der PEp und der Zerlegung der Feynmanamplitude in einen vollständigen Satz von Amplituden konzentrieren wir uns im Rest des verbleibenden Kapitels auf die PEp bei kleinen Energien. Im Gegensatz dazu wird in Kap. 5 die PEp bei großen und harten Energieüberträgen vorgestellt. Um die Lücke zwischen hartem und weichem Regime zu schließen werden wir in den anschließenden Kapiteln im Rahmen der LCSR die PEp bei moderaten Energien diskutieren. Letzteres stellt den Hauptgegenstand der Arbeit dar.

3.1 Kinematik der Pion-Elektroproduktion

Die PEp ist einer der prominentesten Streuprozesse in der Hochenergiephysik. Durch Streuung eines virtuellen Photons mit einem Nukleon, Proton oder Neutron, entsteht ein auslaufendes Nukleon zusammen mit einem Pion. Jenes Pion wird innerhalb des Streuprozesses für Energien des einlaufenden Elektrons größer als die Pion Masse von $m_\pi \approx 0.14$ GeV erzeugt. Prinzipiell betrachtet man also

$$\begin{aligned} e(l) + p(P) &\rightarrow e(l') + \pi^+(k) + n(P'), \\ e(l) + p(P) &\rightarrow e(l') + \pi^0(k) + p(P') \end{aligned} \tag{3.1}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} e(l) + n(P) &\rightarrow e(l') + \pi^-(k) + p(P'), \\ e(l) + n(P) &\rightarrow e(l') + \pi^0(k) + n(P'). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Innerhalb des Prozesses definieren wir folgende Kinematik

$$\begin{aligned} q &= l - l', \quad s = (l + P)^2, \quad W^2 = (k + P')^2, \\ q^2 &= -Q^2, \quad P'^2 = P^2 = m_N^2, \quad k^2 = m_\pi^2, \end{aligned}$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot l} = \frac{W^2 + Q^2 - m_N^2}{s - m_N^2} \quad (3.3)$$

und

$$\begin{aligned} W^2 &= (q + P)^2 = (k + P')^2, \\ t &= (k - q)^2 = (P' - P)^2, \\ u &= (P - k)^2 = (q - P')^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die entsprechenden Impulse sind durch (3.1) und (3.2) festgelegt. m_N ist die Nukleonmasse m_π ist die Pionmasse. Für Pionimpulse $\vec{k} = 0$ erhalten wir einen in der Vergangenheit vieldiskutierten Grenzfall von impulslosen Pionen. Folglich lässt sich die kinematische Größe W umschreiben in

$$W \Rightarrow W_{th} = (k + P')^2 = (m_N + m_\pi)^2. \quad (3.5)$$

Die Abkürzung W_{th} steht dabei für den Wert von W im Spezialfall solcher impulsloser Pionen und *th* ist die englische Kurzbezeichnung für *Threshold*. Im Folgenden sei, wann immer von einer physikalischen Größe die Rede ist, der Fall softer (weicher) Pionen, für $\vec{k} = 0$, mit *Threshold* bezeichnet.

Die invariante Energie W kann im Laborsystem durch Q^2 und q_0 ausgedrückt werden. W kann dabei in die Form

$$-q^2 = m_N^2 - W^2 + 2m_N q_0, \quad (3.6)$$

gebracht werden. Für ein gegebenes W kann q^2 in der $(-q^2, q_0)$ Ebene dargestellt werden. Im Fall der elastischen Streuung reduziert sich W einfach auf $W = m_N$ und wir haben lediglich

$$-q^2 = 2m_N q_0. \quad (3.7)$$

Im Falle der Threshold-PEp ergibt sich direkt

$$-q^2 = 2m_N q_0 - (2m_N + m_\pi)m_\pi \quad (3.8)$$

und für Photoproduktion ($q^2 = 0$) erhalten wir die Bedingung

$$W^2 = 2m_N q_0 + m_N^2. \quad (3.9)$$

Das elektromagnetische Matrixelement ist grundsätzlich mit

$$\langle N(P - q) | j_\mu^{\text{em}}(0) | N(P) \rangle = \bar{N}(P - q) \left[\gamma_\mu F_1(Q^2) - i \frac{\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} F_2(Q^2) \right] N(P) \quad (3.10)$$

definiert. Dabei sind F_1 bzw. F_2 die Dirac bzw. Pauli Formfaktoren. Oft ist die Rede von Kombinationen aus diesen Formfaktoren

$$G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2), \quad G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \frac{Q^2}{4m^2} F_2(Q^2) \quad (3.11)$$

mit der Normierung

$$\begin{aligned} \text{Proton : } & G_E(0) = 1, \quad G_M(0) = \mu_p = 2.792847337(29), \\ \text{Neutron : } & G_E(0) = 0, \quad G_M(0) = \mu_n = -1.91304272(45). \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1. KINEMATIK DER PION-ELEKTROPRODUKTION

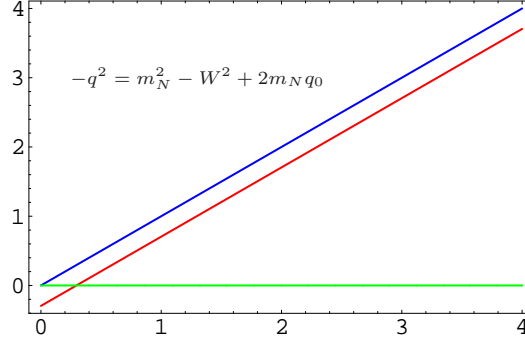


Abbildung 3.1: Dargestellt ist $-q^2$ als Funktion von $2m_N q_0$. Die blaue Linie entspricht für exakt $W = m_N$ der elastischen Elektron-Proton Streuung, während die rote Linie den kinematischen Bereich der Threshold-PEp darstellt. Die grüne Linie markiert den Bereich der Photoproduktion ($q^2 = 0$).

In Analogie zur (3.10) definieren wir wegen Lorentzkovarianz und Stromerhaltung das **Matrizelement der PEp auf der Threshold** zu

$$\langle N(P)\pi(k)|j_\mu^{em}(0)|p(P')\rangle = -\frac{i}{f_\pi}\bar{N}(P)\gamma_5 \left\{ (\gamma_\mu q^2 - q_\mu \not{q}) \frac{1}{m_N^2} G_1^{\pi N}(Q^2) - \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} G_2^{\pi N}(Q^2) \right\} N(P'). \quad (3.13)$$

(3.13) führt damit **zwei neue Formfaktoren** G_1 und G_2 ein, die den Übergang $N \rightarrow N\pi$ beschreiben. Dabei sei darauf hingewiesen, dass (3.13) nur bei exakt $W_{th} = m_N + m_\pi$ valide ist. Allein auf der Threshold reduziert sich das Matrizelement auf lediglich zwei einzelne Strukturen.

Im Grenzfall von $m_\pi \rightarrow 0$, $|\vec{k}| = 0$ und $Q = \mathcal{O}(m_\pi)$ kann gezeigt werden, dass die PEp aus vier dominanten Diagrammen besteht. Eines beschreibt die chirale Rotation, bei welcher das auslaufende Pion durch einen Kommutatoroperator, bestehend aus elektromagnetischen Strom j_μ und axialer Ladung Q_5^a , ersetzt wird.

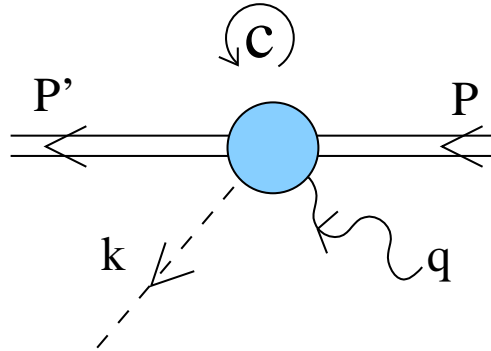


Abbildung 3.2: Darstellung der chiralen Rotation, bei der das auslaufende Pion durch einen Kommutator mit der axialen Ladung Q_5^a ersetzt wird. Für $W = W_{th} = m_N + m_\pi$, also auf der Threshold, verschwinden alle höheren Wellen und das Diagramm ist der einzig verbleibende Beitrag.

$$\langle \pi^a N | j_\mu | N \rangle \sim \langle N | [j_\mu, Q_5^a] | N \rangle. \quad (3.14)$$

Der Emission des Pions entsprechen die Poldiagramme und so ist es möglich das Pion vor (Nukleon-Pol, s-Kanal) oder nach (Crossed-Nukleon-Pol, u-Kanal) der Streuung mit dem Photon zu erzeugen. Allerdings besteht ebenso die Möglichkeit, dass das emittierte Pion direkt mit dem Photon streut (Pion-Pol, t-Kanal).

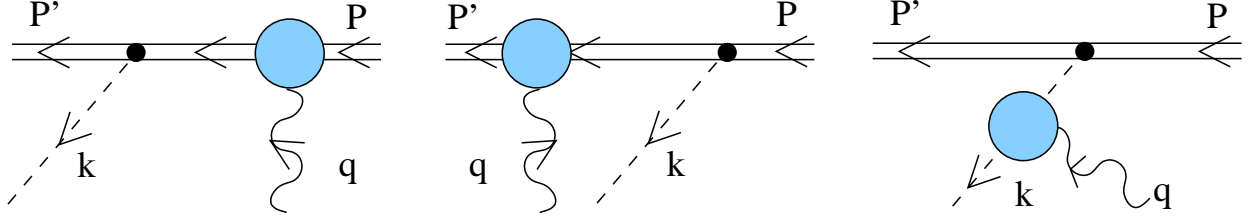


Abbildung 3.3: Darstellung der P-Wellen Beiträge, welche die Emission des Pions beschreiben.

Die Threshold Pion-Photo- und Elektroproduktion $\gamma N \rightarrow \pi N$, $\gamma^* N \rightarrow \pi N$ ist seit Jahrzehnten ein Objekt wissenschaftlicher Untersuchungen, sowohl experimentell als auch theoretisch. Ganz besondere Aufmerksamkeit erhielt die Verbindung zwischen der geladenen Pionproduktion und dem axialen Formfaktor. Wegen der Masse des Pions von $m_\pi/m_N \sim 1/7$ bot sich eine ideale Möglichkeit, die Physik im Rahmen der CHPT studieren.

Erst etwa 20 Jahre später machten es technische Fortschritte im Bereich der Hochenergiephysik möglich, Threshold Pionproduktion im Bereich von $Q^2 \sim 0.04 - 0.1 \text{ GeV}^2$ [16] im Rahmen der CHPT weiter zu untersuchen. Ganz besonders sei an dieser Stelle auf die Artikel [17, 18] verwiesen. Dies führte zu einem Wiedererstarken der CHPT und die entsprechenden Ergebnisse für Pion-Photoproduktion waren sehr vielversprechend [19]. Allerdings muss dabei beachtet werden, dass die Grenzwerte $m_\pi \rightarrow 0$ und $Q^2 \rightarrow 0$ nicht miteinander vertauschen. Infolgedessen stellte sich innerhalb der Berechnung in [20, 21] heraus, dass bestimmte Loopdiagramme nicht-analytische Beiträge produzieren, welche für Entwicklungen der Form $\mathcal{O}(m_\pi)$ in finiten Pionmassen nicht vorhanden sind.

3.2 Multipolzerlegung der Amplitude

In diesem Abschnitt soll eine mögliche explizite Darstellung der Amplitude der PEP vorgestellt werden. In der Literatur wird oft eine Multipolzerlegung verwendet. Sie zerlegt die Amplitude in einen vollständigen Satz an standardisierten CGLN Amplituden* F_i und korrespondierenden Strukturen innerhalb der center-of-mass (c.m.) Systems [22, 23, 24, 25]

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{4\pi W}{m_N} \left[i\vec{\sigma} F_1 + (\vec{\sigma} \cdot \hat{k})(\vec{\sigma} \times \hat{q}) F_2 + i\hat{k}(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}) F_3 + i\hat{k}(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}) F_4 + i\hat{q}(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}) F_5 + i\hat{q}(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}) F_6 \right], \\ M_0 &= \frac{4\pi W}{m_N} \left[i(\vec{\sigma} \cdot \hat{k}) F_7 + i(\vec{\sigma} \cdot \hat{q}) F_8 \right] = \frac{\vec{q} \cdot \vec{M}}{\omega}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei $\vec{\sigma}$ den Spin Operator bezeichnet. Die Größen $\hat{q} = \vec{q}/|\vec{q}|$ und $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$ sind die Einheitsvektoren des Photons und Pions. $\vec{a} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{q})\hat{q}$ ist ein Vektor mit nur transversalen Komponenten. Die Amplituden F_1, \dots, F_8 sind komplexe Funktionen der drei unabhängigen Variablen W , θ und q^2 . Wegen Stromerhaltung folgen umgehend die beiden Beziehungen [24, 25]

$$|\vec{q}| F_5 = \omega F_8 \quad (3.16)$$

*CGLN steht für: Chew-Goldberger-Low-Nambu, siehe [22]

3.2. MULTIPOLZERLEGUNG DER AMPLITUDE

und

$$|\vec{q}| F_6 = \omega F_7, \quad (3.17)$$

mit $\omega = q_0$. Es folgt daraus sofort, dass nur sechs der acht Amplituden F_1, \dots, F_8 unabhängig sind. Grundsätzlich gibt es drei Arten von Übergängen: den elektrischen (E) und longitudinalen (L) mit Parität $(-1)^\lambda$ und den magnetischen (M) mit Parität $(-1)^{\lambda+1}$. Der Parameter λ ist dabei die Multipolarität des Photons. Mit Hilfe dieser Übergänge können die Amplituden F_1, \dots, F_8 in elektrische, longitudinale und magnetische Multipole zerlegt werden. Dabei ist l stets der Pion- und $j = l \pm 1/2$ der gesamte Drehimpuls des πN Systems. Es ergeben sich die Relationen [22, 23, 24, 25, 26]

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{l \geq 0} \{ (l M_{l+}^{\pi N} + E_{l+}^{\pi N}) P'_{l+1} + [(l+1) M_{l-} + E_{l-}] P'_{l-1} \}, \\ F_2 &= \sum_{l \geq 1} [(l+1) M_{l+}^{\pi N} + l M_{l-}^{\pi N}] P'_l, \\ F_3 &= \sum_{l \geq 1} [(E_{l+}^{\pi N} - M_{l+}^{\pi N}) P''_{l+1} + ((E_{l-}^{\pi N} + M_{l-}^{\pi N}) P''_{l-1})], \\ F_4 &= \sum_{l \geq 2} (M_{l+}^{\pi N} - E_{l+}^{\pi N} - M_{l-}^{\pi N} - E_{l-}^{\pi N}) P''_l, \\ F_5 &= \sum_{l \geq 0} [(l+1) L_{l+}^{\pi N} P'_{l+1} - l L_{l-}^{\pi N} P'_{l-1}], \\ F_6 &= \sum_{l \geq 1} [l L_{l-}^{\pi N} - (l+1) L_{l+}^{\pi N}] P'_l. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Elemente P'_l sind Legendrepolynome. Wichtig ist zu beachten, dass die Multipole E_{0-} , E_{1-} , M_{0+} , M_{0-} , L_{0-} nicht existieren, da sie unphysikalisch sind.

Innerhalb der komplexen Analysis können wir die Amplituden F_l grundsätzlich auch schreiben als

$$F_l = e^{i\delta_l} R_l, \quad (3.19)$$

wobei δ die entsprechende Pion-Nukleon Phasendifferenz und R_l die reelwertige Amplitude ist. Entsprechend sind alle Multipole für $l > 0$ komplexwertige Funktionen und können mit einer Phase dargestellt werden. Auf der Threshold, d.h. für $W + W_{th} = m_N + m_\pi$, reduziert sich die Expansion (3.18) lediglich auf Beiträge für $l = 0$. Der Operator ist demnach für $\vec{k} = 0$ nur aus den Amplituden F_1 und F_5 aufgebaut. Es ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} F_1^{th} &= E_{0+}^{\pi N} P'_1, \\ F_2^{th} &= 0, \\ F_3^{th} &= 0, \\ F_4^{th} &= 0, \\ F_5^{th} &= L_{0+}^{\pi N} P'_1, \\ F_6^{th} &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Offensichtlich ist der Streuprozess auf der Threshold also durch zwei Multipoles definiert, den elektrischen $E_{0+}^{\pi N}$ und den longitudinalen $L_{0+}^{\pi N}$.

Da der Isospin im Pion-Nukleon System stets erhalten ist, können die Amplituden F_i durch drei unabhängige Amplituden ausgedrückt werden. Innerhalb der Linearkombination stellt $A^{(0)}$ den isoskalaren Beitrag induziert durch das Photon dar, während $A^{(1/2)}$ und $A^{(3/2)}$ für den isovektoriellen Beitrag im πN -System mit Isospin 1/2 und 3/2 stehen. Definieren wir noch die Proton und Neutron Amplituden ${}_p A^{(1/2)}$ ${}_n A^{(1/2)}$ mit

$${}_p A^{(1/2)} = A^{(0)} + \frac{1}{3} A^{(1/2)}, \quad {}_n A^{(1/2)} = A^{(0)} - \frac{1}{3} A^{(1/2)} \quad (3.21)$$

so haben wir für das πN -System

$$\begin{aligned} A(\gamma^* p \rightarrow n \pi^+) &= \sqrt{2} \left[{}_p A^{(1/2)} - \frac{1}{3} A^{(3/2)} \right], & A(\gamma^* p \rightarrow p \pi^0) &= {}_p A^{(1/2)} + \frac{2}{3} A^{(3/2)}, \\ A(\gamma^* n \rightarrow p \pi^-) &= \sqrt{2} \left[{}_n A^{(1/2)} + \frac{1}{3} A^{(3/2)} \right], & A(\gamma^* n \rightarrow n \pi^0) &= -{}_n A^{(1/2)} + \frac{2}{3} A^{(3/2)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Insofern kann jeder Kanal durch Kombination aus 1/2 und 3/2 Amplituden aufgebaut werden.

3.3 Entwicklungen für kleine Q^2

Innerhalb der beiden folgenden Unterabschnitte wird die PEp für kleine Q^2 näher untersucht. Zum einen kann die Feynmanamplitude der PEp für kleine Q^2 und unter Verwendung des Soft-Pion Theorems in zwei Partialwellen zerlegt werden, welche voneinander völlig unabhängig sind. Zum anderen werden wir mit Hilfe der CHPT eine Entwicklung des Threshold Multipoles E_{0+} in Q^2 vorstellen. In beiden Fällen handelt es sich um nichts anderes als um Entwicklungen für weiche Pionen bei kleinen Q^2 .

3.3.1 Das Soft-Pion Theorem

Betrachten wir das Matrixelement der PEp. Für den Streuprozess nehmen wir an, dass das Pion weich zum ausgehenden Zustand ist. Im Englischen spricht man in diesem Zusammenhang von *soft pions*. Bei nicht zu großen Virtualitäten des Photons

$$Q^2 \ll \Lambda^3 / m_\pi, \quad (3.23)$$

wobei Λ die hadronische Skala ist, kann gezeigt werden, dass der Prozess der PEp

$$\begin{aligned} e(l) + p(P) &\rightarrow e(l') + \pi^+(k) + n(P'), \\ e(l) + p(P) &\rightarrow e(l') + \pi^0(k) + p(P') \end{aligned} \quad (3.24)$$

durch Nukleon Formfaktoren ausgedrückt werden kann. Elementare Beziehungen zur Herleitung des Theorems ist die PCAC Relation, welche eine fundamentale Beziehung zwischen dem axialen Feld $A_\nu^a(x)$ und dem Pion interpolierendem Feld $\phi^a(x)$ liefert

$$\partial^\nu A_\nu^a(x) = m_\pi^2 f_\pi \phi^a(x). \quad (3.25)$$

Hierbei ist f_π die Pion Zerfallskonstante mit der Definition

$$\langle 0 | \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \tau^a q | \pi^b(k) \rangle = i \delta^{ab} f_\pi k_\mu. \quad (3.26)$$

3.3. ENTWICKLUNGEN FÜR KLEINE Q^2

Eine Folge von (3.25) ist die *Goldberger-Treimann Relation*. Sie stellt eine direkte Verbindung zwischen dem Nukleon-Pion Vertex $g_{\pi NN}$ und der axialen Kopplung $g_A \approx 1.25$ her:

$$g_{\pi NN} f_\pi = m_N g_A. \quad (3.27)$$

Unter Verwendung von (3.25) und (3.27) erhält man nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} \langle 0 | O | \pi^a(k) N_f(P, \lambda) \rangle &= -\frac{i}{f_\pi} \langle 0 | [Q_5^a, O] | N_f(P, \lambda) \rangle \\ &\quad - \frac{ig_A}{4f_\pi(P \cdot k)} \sum_{\lambda', f'} \langle 0 | O | N_{f'}(P, \lambda') \rangle \bar{N}(P, \lambda') \not{k} \gamma_5 \tau_{ff'}^a N(P, \lambda) \end{aligned} \quad (3.28)$$

und gleichzeitig für πN im Endzustand

$$\begin{aligned} \langle \pi^a(k) N_f(P, \lambda) | O^\dagger | 0 \rangle &= -\frac{i}{f_\pi} \langle N_f(P, \lambda) | [Q_5^a, O^\dagger] | 0 \rangle \\ &\quad + \frac{ig_A}{4f_\pi(P \cdot k)} \sum_{\lambda', f'} \bar{N}(P, \lambda) \not{k} \gamma_5 \tau_{ff'}^a N(P, \lambda') \langle N_{f'}(P, \lambda') | O^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O ist der nichtlokale Dreiquarkoperator und Q_5^a ist der Operator der axialen Ladung

$$Q_5^a = \int d^3x \bar{q}(x) \gamma_0 \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q(x), \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

wobei die τ^a die Pauli Matrizen darstellen. Der zweite Term in (3.28) und (3.29) korrespondiert zur Pion-Bremsstrahlung des (ausgehenden) einlaufenden Nukleons und ist von der Ordnung $\mathcal{O}(m_\pi)$. Der Bremsstrahlungsterm kann immer addiert oder von der S-Welle separiert werden. Wichtig ist zu beachten, dass der Bremsstrahlungsterm für $W_{\text{th}} = m_N + m_\pi$ vollständig verschwindet und sich somit (3.28) bzw. (3.29) auf

$$\langle 0 | O | \pi^a(k) N_f(P, \lambda) \rangle = -\frac{i}{f_\pi} \langle 0 | [Q_5^a, O] | N_f(P, \lambda) \rangle \quad (3.31)$$

bzw.

$$\langle \pi^a(k) N_f(P, \lambda) | O^\dagger | 0 \rangle = -\frac{i}{f_\pi} \langle N_f(P, \lambda) | [Q_5^a, O^\dagger] | 0 \rangle \quad (3.32)$$

reduzieren. Für $W - W_{\text{th}} \sim m_\pi$ hingegen wird der Bremsstrahlungsterm wichtig und beginnt sogar die S-Welle (Kommutatorterm) zu dominieren. Es ist offensichtlich, dass der Bremsstrahlungsanteil (P-Welle) durch Nukleon Formfaktoren parametrisiert ist. Insofern gibt uns das Soft-Pion Theorem die Möglichkeit mit Hilfe einiger Stromalgebra, das Matrixelement der PEp in eine äquivalente Amplitude ohne Pion umzuschreiben.

Gleichung (3.28) versetzt uns jetzt in die Lage das physikalische Matrixelement zu betrachten. Mit Spinsummation und einer kurzen Nebenrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle N(P') \pi(k) | j_\mu^{em}(0) | p(P) \rangle &= \text{S-Welle} \\ &\quad + \frac{ic_\pi g_A}{2f_\pi[(P' + k)^2 - m_N^2]} \bar{N}(P') \not{k} \gamma_5 (\not{P}' + m_N) \left\{ F_1^p(Q^2) \gamma_\mu + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} F_2^p(Q^2) \right\} N(P). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Um Stromerhaltung gemäß

$$q^\mu \langle N(P') \pi(k) | j_\mu^{em}(0) | p(P) \rangle = 0 \quad (3.34)$$

zu gewährleisten, ersetzen wir den Vertex γ_μ durch die einfache Substitution

$$\gamma_\mu = \left(\gamma_\mu - \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} \right) \quad (3.35)$$

und erhalten somit natürlich

$$\begin{aligned} \langle N(P') \pi(k) | j_\mu^{em}(0) | p(P) \rangle = & \text{S-Welle} \\ & + \frac{ic_\pi g_A}{2f_\pi[(P' + k)^2 - m_N^2]} \bar{N}(P') \not{k} \gamma_5 (P' + m_N) \left\{ F_1^p(Q^2) \left(\gamma_\mu - \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} \right) + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} F_2^p(Q^2) \right\} N(P). \end{aligned} \quad (3.36)$$

c_π ist die Isospinanzahl. Speziell gilt $c_{\pi^0} = 1$ und $c_{\pi^\pm} = \sqrt{2}$.

3.3.2 Entwicklung von $E_{0+}^{\pi N}$ für kleine Q^2 in der CHPT

Das Nukleon ist ein ausgedehntes Objekt und daher ist es natürlich von großem Interesse Informationen über die Struktur und die Ausdehnung zu erhalten. Wegen seiner räumlichen Struktur können wir in Bezug auf das Nukleon den axialen Radius r_A als Ausdehnungsparameter definieren. Die experimentelle Messung von r_A , bzw. dessen Extraktion aus gemessenen Daten, wurde bisher bei zwei typischen Experimenten vorgenommen. Zum einen bei der (Anti)neutrino-Proton [27, 28, 29] Streuung und zum anderen in Zusammenhang mit der Threshold PEp [30, 31]. Bei einem Vergleich der Ergebnisse aus den beiden Experimenten stellte sich heraus, dass die Ergebnisse zu r_A aus der PEp etwas kleinere Werte ergab als diejenigen aus der (Anti)neutrino-Proton Streuung. Der Hauptgrund für diese Abweichung ist die Pionwolke, das Nukleon umgebend, und deren Effekte in der CHPT, welche charakteristisch für die PEp sind. In der Arbeit [32] wurde im Rahmen der CHPT ein Modell weiterentwickelt, welches auf Ergebnissen aus [33] aufbaut. Es stellt den S-Wellen Multipol $E_{0+}^{\pi N}$ mit dem axialen Radius r_A in Verbindung. Speziell wurde in der Arbeit [33] $E_{0+}^{\pi N}$ im chiralen Limes m_π berechnet. Ausgangspunkt für [32] war dabei das Ergebnis zu $E_{0+}^{\pi^+ n}$ [33]

$$E_{0+}^{\pi^+ n}(Q^2, m_\pi = 0) = \left[1 + \frac{Q^2}{4m_N^2} \right]^{1/2} \frac{eg_A}{8\pi f_\pi} \left\{ G_A(Q^2) - \frac{Q^2}{4m_N^2 + 2Q^2} G_M^V(Q^2) \right\}, \quad (3.37)$$

wobei $G_A(Q^2)$ der axiale Formfaktor und G_M^V der iso-vektorielle Beitrag zum Formfaktor G_M des Nukleons ist. $f_\pi = 92$ MeV stellt die Pion Zerfallskonstante dar, $q^2 = -Q^2$ und m_N ist die Nukleonmasse. Speziell definieren wir für Formfaktoren

$$F^{p,n}(Q^2) = \frac{1}{2} \left(F^S(Q^2) \pm F^V(Q^2) \right). \quad (3.38)$$

F^S und F^V bezeichnen den Iso-Vektor- und Iso-Skalarbeitrag zum Formfaktor und haben im Photoproduktions-Limes (also für $Q^2 = 0$) die Momente

$$\begin{aligned} F_1^S(0) &= F_1^V(0) = 1, \\ F_2^S(0) &= F_2^p(0) + F_2^n(0) = \kappa^S = \kappa_p + \kappa_n \approx -0.12, \\ F_2^V(0) &= F_2^p(0) - F_2^n(0) = \kappa^V = \kappa_p - \kappa_n \approx 3.70. \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.4. LOW-ENERGY THEOREMS (LETS)

Wegen $G_M = F_1 + F_2$ folgt deshalb $G_M^V(0) \approx 4.70$. Die explizite Form von G_A ist für gewöhnlich seine Dipoldarstellung mit

$$G_A = (1 + Q^2/M_A^2)^{-2}, \quad (3.40)$$

dabei ist M_A ein Parameter den man als die *axiale Masse* bezeichnet. Nach einer Expansion in Q^2 ergibt sich für (3.37) [33]

$$E_{0+}^{\pi^+n}(Q^2, m_\pi = 0) = \frac{eg_A}{8\pi f_\pi} \left\{ 1 - \frac{Q^2}{6} r_A^2 - \frac{Q^2}{4m_N^2} \left[\kappa^V + \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O}(q^3) \right\}. \quad (3.41)$$

Im Anschluss daran war es Ziel der Arbeit [32] zu (3.41) Korrekturen in m_π bis zur Ordnung $\mathcal{O}(m_\pi^2)$ zu berechnen. Dabei ergab sich für $E_{0+}^{\pi^+n}$ [32]

$$E_{0+}^{\pi^+n}(Q^2, m_\pi \neq 0) = \frac{eg_A}{8\pi f_\pi} \left\{ 1 - \frac{Q^2}{6} r_A^2 - \frac{Q^2}{4m_N^2} \left[\kappa^V + \frac{1}{2} \right] + \frac{m_\pi}{m_N} + Cm_\pi^2 + m_\pi^2(\dots) + \mathcal{O}(q^3) \right\}. \quad (3.42)$$

Die Koeffizienten $Cm_\pi^2 + m_\pi^2(\dots)$ geben dabei bestimmte Korrekturen an, deren explizite Darstellung zu weit gehen würde. Letztendlich ergeben die Korrekturen eine kleine Abweichung im Vergleich zum Ausgangswert aus [33]. Man hat lediglich die einfache Substitution

$$r_A^2 \rightarrow r_A^2 + \frac{3}{64f_\pi^2} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \quad (3.43)$$

durchzuführen, was eine Verkleinerung von etwa 10 Prozent bewirkt. Für den Wert von r_A aus der PEp ergab sich demgemäß:

$$r_A^2 = 0.38 \text{ fm}^2, \quad (3.44)$$

entsprechend $M_A = 1.11 \text{ GeV}$ im Gegensatz zu Neutrinoexperimenten welche $r_A^2 = 0.42$ ergaben. Insofern erklären die Korrekturen in m_π die Diskrepanz in den Ergebnissen zwischen den Messungen aus Neutrinoexperimenten und denen aus der Threshold PEp durch Störungseffekte, verursacht durch die Pionwolke.

In Bezug auf die neutrale PEp ist der entsprechende Multipol $E_{0+}^{\pi^0p}$ wegen der Absenz des Kroll-Rudermann Terms ($\sim G_A$) um den Faktor $m_\pi/m_N \sim 1/7$ unterdrückt. Das entsprechende Ergebnis im Rahmen der CHPT ergibt [34]

$$E_{0+}^{\pi^0p}(m_\pi \neq 0) = \frac{eg_A}{8\pi f_\pi} \left[\frac{m_\pi}{m_N} + \frac{m_\pi^2}{2m_N^2} (3 + \kappa_p) + \frac{m_\pi^2}{16f_\pi^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m_\pi^3}{m_N^3}\right). \quad (3.45)$$

Im Grunde stellen also (3.42) und (3.45) nichts anderes als den Soft-Pion Limes für kleine Q^2 dar, aus dessen Ergebnis physikalische Größen wie der axiale Radius gewonnen werden können.

3.4 Low-Energy Theorems (LETs)

Für niedrige Impulsüberträge sind Beiträge der Pion Emission durch das einlaufende Nukleon dominant. Zusätzlich gibt es für die Produktion des π^+ Beiträge, welche einer chiralen Rotation entsprechen. Für $Q^2 \ll \Lambda^3/m_\pi$ und $m_\pi \rightarrow 0$ ergeben sich so basierend auf Strom- und Kommutatoralgebra [21, 35, 36]:

$$\begin{aligned}
\frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 p} &= \frac{g_A}{2} \frac{Q^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_M^p, \\
G_2^{\pi^0 p} &= \frac{2g_A m_N^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_E^p, \\
\frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^+ n} &= \frac{g_A}{\sqrt{2}} \frac{Q^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_M^n + \frac{1}{\sqrt{2}} G_A, \\
G_2^{\pi^+ n} &= \frac{2\sqrt{2}g_A m_N^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_E^n,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

wobei $G_{M,E}^p(Q^2)$ und $G_{M,E}^n(Q^2)$ die Sachs-Formfaktoren sind und dabei der Emission eines Pions im Anfangszustand entsprechen. Für Korrekturen in m_π ergeben sich entsprechende Ausdrücke gemäß [20, 21]. Im Folgenden bezeichnen wir dieses Modell als das **Referenzmodell**. Die Herleitung der Ausdrücke (3.46) gilt für niedrige Energien bis zu $m_\pi Q^2/m_N^3 = \mathcal{O}(1)$, wo die CHPT zumindest in der Standardformulierung nicht mehr anwendbar ist. Das Modell (3.46) ist also ein Niederenergiemodell[†]. Obwohl LETs aus historischer Sicht für kleine Impulstransfers von $Q^2 > 0.1 \text{ GeV}^2$ stammen, ist ihre Richtigkeit nicht gefährdet, solange das emittierte Pion weich zum einlaufenden Nukleon bleibt und damit $Q^2 < \Lambda^3/m_\pi$ erfüllt ist. Für größere Q^2 ist es wahrscheinlich, dass die LET Resultate (3.46) zusammen brechen. Erkennbar ist, dass $\frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 p}$ wegen des Faktors G_M^p große Werte annimmt, wohingegen $G_2^{\pi^0 p}$ wegen G_E^p stets sehr klein und positiv ist. Im Falle von $\frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^+ n}$ ergibt sich als zusätzlicher Beitrag, wegen der chiralen Rotation, der des axialen Formfaktors G_A (Kroll-Rudermann Term). Da G_A positiv ist, jedoch G_M^n negativ, kürzen sich Beiträge von G_A und G_M^n heraus. Bei der Pion-Photoproduktion ($Q^2 = 0$) werden gemäß (3.46) erheblich mehr π^+ als π^0 produziert und das π^0/π^+ Verhältnis steigt rapide für größer werdende Q^2 an, was auch experimentell verifiziert werden kann.

3.5 Zusammenfassung des Kapitels

PEp ist einer der prominentesten Streuvorgänge in der QCD und hat eine große Historie. Die Erzeugung des Pions wird vom streuenden Elektron mit dem Nukleon über ein (virtuelles) Photon herbeigeführt. Im Grenzfall von $m_\pi \rightarrow 0$, $|\vec{k}| = 0$ und $Q = \mathcal{O}(m_\pi)$ können wir den Streuprozess auf insgesamt vier Diagramme reduzieren. Ein erster Term entsteht wegen der chiralen Rotation der axialen Ladung Q_5 mit dem elektromagnetischen Strom, siehe Abb. 3.2. Innerhalb einer Partialwellenzerlegung spricht man dann von einer S-Welle. Die Emission des Pions wird durch die drei Poldiagramme Abb. 4.4 beschrieben. Dabei kann das Pion in drei unterschiedlichen Kanälen erzeugt werden. Im Spezialfall von impulslosen Pionen ($\vec{k} = 0$) ergibt sich für die invariante Energie $W_{th} = m_N + m_\pi$. In diesem Zusammenhang sprechen wir von *Threshold Pionproduktion*.

Mittels einer Partialwellenzerlegung des Matrixelements der PEp können wir die Amplitude in Multipole zerlegen. Auf der Threshold verbleiben dann lediglich die beiden *S-Wellen* Beiträge $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$, welche einen elektrischen und einen longitudinalen Übergang induzieren.

Mit Hilfe des Soft-Pion Theorems war es uns im Anschluss möglich, die Amplitude unter Verwendung von Kommutator- und Stromalgebra für kleine Pionimpulse in Partialwellen zu entwickeln, welche in der Literatur mit S- und P-Wellen bezeichnet werden. Die Beiträge, verursacht durch die Emission des Pions (P-Wellen), können vollständig durch Nukleon Formfaktoren ausgedrückt werden. Für $W_{th} = m_N + m_\pi$

[†]zu Englisch: Low energy theorem (LET)

3.5. ZUSAMMENFASSUNG DES KAPITELS

verschwinden die Polbeiträge identisch und der einzig verbleibende Beitrag wird durch die S-Welle reproduziert.

Innerhalb der CHPT kann $E_{0+}^{\pi^+n}$ mit dem axialen Radius r_A in Verbindung gebracht werden. Dies eröffnet einen Zugang zur direkten Messung von r_A über eine Extraktion von $E_{0+}^{\pi^+n}$. Im Gegensatz dazu ist $E_{0+}^{\pi^0p}$ wegen des Fehlens der chiralen Rotation (kein g_A) zusätzlich um den Faktor m_π/m_N unterdrückt.

Abschließend wurden LETs aus [21, 35, 36] vorgestellt. Sie schaffen die Verbindung zwischen Nukleon Formfaktoren und den neuen $G_i^{\pi N}$ der Threshold-PEp. Im chiralen Limes $m \rightarrow 0$ vereinfachen sich die Resultate erheblich und wir haben schließlich (3.46).

4

Allgemeine Berechnungen zur Pion-Elektroproduktion

4.1 Strukturfunktionen und Asymmetrien

Im vorherigen Abschnitt wurden Vorhersagen für kleine Q^2 getroffen. In diesem Kapitel werden nun allgemeine rechnerische Überlegungen angestellt. Wir werden sowohl die vier Strukturfunktionen F_1, F_2 und g_1, g_2 als auch den differentiellen Streuquerschnitt berechnen. Gemeinsamer Ausgangspunkt ist die Parametrisierung des Threshold Übergangs $N \rightarrow N\pi$, wie in (3.13) dargestellt. In diesem Zusammenhang wird als weiteres Hilfsmittel das Soft-Pion Theorem verwandt, um die Amplitude für kleine Pionimpulse k in Partialwellen zu entwickeln.

Im Folgenden sollen nun die Ergebnisse mit einer kurzen Motivation zur Herleitung präsentiert werden. Für detailliertere Angaben zur Herleitung wird auf Appendix A verwiesen.

Üblicherweise wird der DIS Streuquerschnitt in der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \alpha_{em} \left(\frac{E}{E'} \right) L_{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

ausgedrückt. Dabei ist

$$L_{\mu\nu} = 2 \left(l_\mu l'_\nu + l'_\mu l_\nu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (4.2)$$

und der vollständige hadronische Tensor $W_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= W_{\mu\nu}^{sym} + W_{\mu\nu}^{asym} = \\ &= -\frac{F_1(W, Q^2)}{m_N} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{F_2(W, Q^2)}{m_N(P \cdot q)} \left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \\ &+ i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha}{P \cdot q} \left[S^\beta g_1(W, Q^2) + \left(S^\beta - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} q^\beta \right) g_2(W, Q^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Andererseits ist $W_{\mu\nu}$ jedoch

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M} \int \frac{d\Omega}{(4\pi)^3} \sum_{\sigma, \sigma'} \langle N(\sigma) | j_\nu^{em} | N(\sigma') \pi \rangle \langle N(\sigma') \pi | j_\nu^{em} | N(\sigma) \rangle \quad (4.4)$$

und die Amplitude der PEP ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \langle N(P') \pi(k) | j_\mu^{em}(0) | p(P) \rangle &= -\frac{i}{f_\pi} \bar{N}(P') \gamma_5 \left\{ (\gamma_\mu q^2 - q_\mu \not{q}) \frac{1}{m_N^2} G_1^{\pi N}(Q^2) - \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} G_2^{\pi N}(Q^2) \right\} N(P) \\ &+ \frac{ic_\pi g_A}{2f_\pi [(P' + k)^2 - m_N^2]} \bar{N}(P') \not{k} \gamma_5 (\not{P}' + m_N) \left\{ F_1^p(Q^2) \left(\gamma_\mu - \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} \right) N(P) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_\pi^2 g_A^2 W^2 \beta^2(W)}{8(W^2 - m_N^2)^2} Q^2 m_N^2 G_M^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ein Vergleich von (4.3) mit (4.4) unter Ausnutzung von (4.5) führt so, nach einiger Rechnung, auf die Ergebnisse zu den vier Strukturfunktionen F_1, F_2, g_1, g_2 . Im chiralen Limes von $m_\pi \rightarrow 0$ und für $k_f = \mathcal{O}(m_\pi)$ erhält man die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} F_1(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{Q^2 + 4m_N^2}{2m_N^4} |Q^2 G_1^{\pi N}|^2 + \frac{c_\pi^2 g_A^2 W^2 \beta^2(W)}{8(W^2 - m_N^2)^2} Q^2 m_N^2 G_M^2 \right\}, \\ F_2(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{Q^2}{m_N^4} \left(|Q^2 G_1^{\pi N}|^2 + \frac{1}{4} m_N^2 Q^2 |G_2^{\pi N}|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_\pi^2 g_A^2 W^2 \beta^2(W) Q^2 m_N^2}{4(W^2 - m_N^2)^2} \left(\frac{Q^2 G_M^2 + 4m_N^2 G_E^2}{Q^2 + 4m_N^2} \right) \right\}, \\ g_1(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{Q^2}{2m_N^4} \left[|Q^2 G_1^{\pi N}|^2 - m_N^2 \text{Re}(Q^2 G_1^{\pi N} G_2^{*, \pi N}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_\pi^2 g_A^2 W^2 \beta^2(W)}{8(W^2 - m_N^2)^2} Q^2 m_N^2 G_M F_1^p \right\}, \\ g_2(W, Q^2) &= -\frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{Q^2}{2m_N^4} \left[|Q^2 G_1^{\pi N}|^2 + \frac{1}{4} Q^2 \text{Re}(Q^2 G_1^{\pi N} G_2^{*, \pi N}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_\pi^2 g_A^2 W^2 \beta^2(W)}{32(W^2 - m_N^2)^2} Q^4 G_M F_2^p \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei

$$\vec{k}_f^2 = \frac{W^2}{4} \left(1 - \frac{(m_N + m_\pi)^2}{W^2} \right) \left(1 - \frac{(m_N - m_\pi)^2}{W^2} \right) \quad (4.7)$$

und gleichzeitig

$$\beta(W) = \frac{2|\vec{k}_f|}{W}. \quad (4.8)$$

In den Ausdrücken haben wir den kinematischen Faktor $W^2 \beta^2(W) = 4|\vec{k}_f|^2$ in seiner exakten Form erhalten und gleichzeitig die Pionmasse und die Differenz aus $W^2 - m_N^2$ vernachlässigt, wo immer es möglich war.

4.1. STRUKTURFUNKTIONEN UND ASYMMETRIEN

In diesem Grenzfall korrespondieren die Beiträge $\sim |G_{1,2}^{\pi N}|^2$ und $\sim |G_{E,M}^p|^2$ jeweils zur reinen S-Welle und P-Welle. Die expliziten und exakten Ausdrücke zu F_1, F_2, g_1, g_2 können in Appendix A nachgelesen werden. In den einzelnen Messungen zu den Strukturfunktionen F_2 ist es eine ganz besondere Herausforderung die

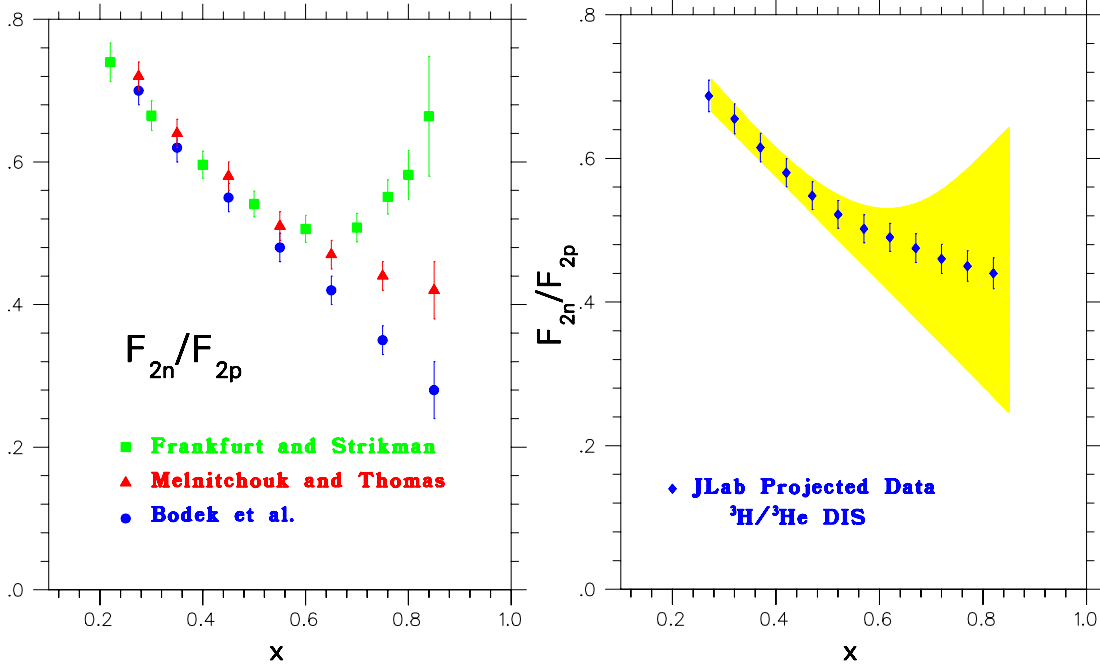


Abbildung 4.1: Linke Abbildung: Das F_2^n/F_2^p Verhältnis [9] aus tiefinelastischen Proton und Deuteron Messungen [37] mit a) einem Modell, welches auf der Fermibewegung der Nukleonen im Kern ruht (Bodek et al. [38]), b) einem Modell, welches Bindungseffekte beinhaltet (Melnitchouk und Thomas [39]), und c) ein weiteres Modell, welches in der Literatur das “nuclear density model” genannt wird und dabei ebenso Bindungseffekte berücksichtigt (Frankfurt und Strikman) [40, 41, 42]. Rechte Abbildung: Korrespondierende Daten des JLAB zu F_2^n/F_2^p [9]. Der gelbe Balken entsteht hauptsächlich durch Modell-Unsicherheiten in der Extraktion von F_2^n aus Deuteron Daten. Die Fermibewegung der Nukleonen ist speziell für große x ganz besonders stark.

des Neutrons zu messen. Für gewöhnlich wird die Neutronstrukturfunktion aus der Strukturfunktion des Deuterons gewonnen. Deshalb ist die experimentelle Messung von F_2^n stets modellabhängig und unterliegt so gewissen theoretischen Annahmen und Unsicherheiten. Unter den vielen in der Vergangenheit entwickelten Näherungen hat sich in der letzter Zeit ein Modell etabliert, welches Bindungs- und Fermi-Bewegungseffekte miteinbezieht [9]

$$F_2^d(x, Q^2) = \int dy f_{N/d}(y) [F_2^p(x/y, Q^2) + F_2^n(x/y, Q^2)], \quad (4.9)$$

dabei ist y der Impulsbruchteil des Deuterons, welcher durch das Nukleon getragen wird und $f_{N/d}(y)$ ist die Verteilungsfunktion. $f_{N/d}(y)$ beschreibt Beiträge durch Wechselwirkungseffekte wie Binding etc.. In Abb. 4.1 entspricht diesem Modell die Kurve b), also dem Modell nach Melnitchouk und Thomas [39]. Extrapoliert man die Ergebnisse nach $x \rightarrow 1$ so ergibt sich ein Wert von etwa ≈ 0.4 .

Für die Asymmetrien ergibt sich

$$\lim_{W \rightarrow W_{th}} A_1^p = \lim_{W \rightarrow W_{th}} \frac{g_1^p(W, Q^2)}{F_1^p(W, Q^2)},$$

$$\lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} A_1^n = \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_1^n(W, Q^2)}{F_1^n(W, Q^2)} \quad (4.10)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} A_2^p &= \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_2^p(W, Q^2)}{F_2^p(W, Q^2)}, \\ \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} A_2^n &= \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_2^n(W, Q^2)}{F_2^n(W, Q^2)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

In Abb. 4.2 und Abb. 4.3 sind die vorhandenen Weltdaten für die einzelnen Strukturfunktionen zusammengestellt.

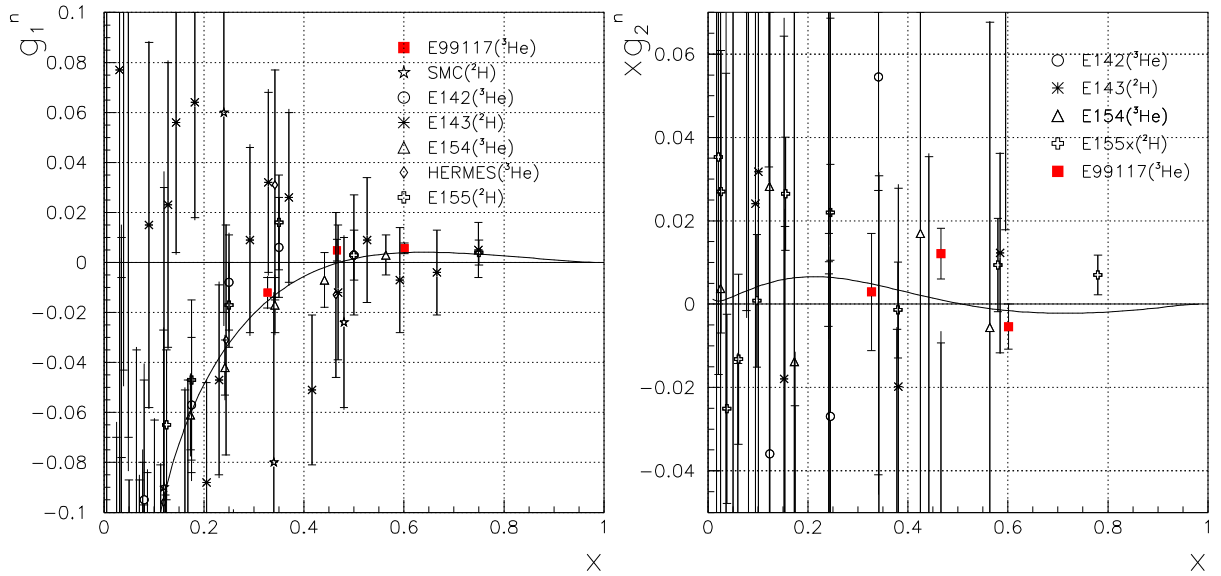


Abbildung 4.2: Weltdaten zu den polarisierten Strukturfunktionen g_1 und g_2 [43], siehe u.a. [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51].

4.2 Die Streuquerschnitte der Pion-Elektroproduktion

In diesem Abschnitt wird im Einzelnen der Streuquerschnitt der Pion-Elektroproduktion hergeleitet. Dabei wird zuerst ein Orthonormalsystem für die Polarisationsvektoren des Photons festgelegt:

$$\begin{aligned} e_{\gamma,\mu}^L &= \frac{(s - m_N^2)}{\sqrt{4m_N^2 Q^4 + y^2(s - m_N^2)^2 Q^2}} \left(q_\mu + \frac{2Q^2 P_\mu}{y(s - m_N^2)} \right), \\ e_{\gamma,\mu}^Y &= \frac{2}{\sqrt{Q^2(s - m_N^2)^2(1 - y) - m_N^2 Q^2}} \varepsilon_{lPq\mu}, \end{aligned}$$

4.2. DIE STREUQUERSCHNITTE DER PION-ELEKTROPRODUKTION

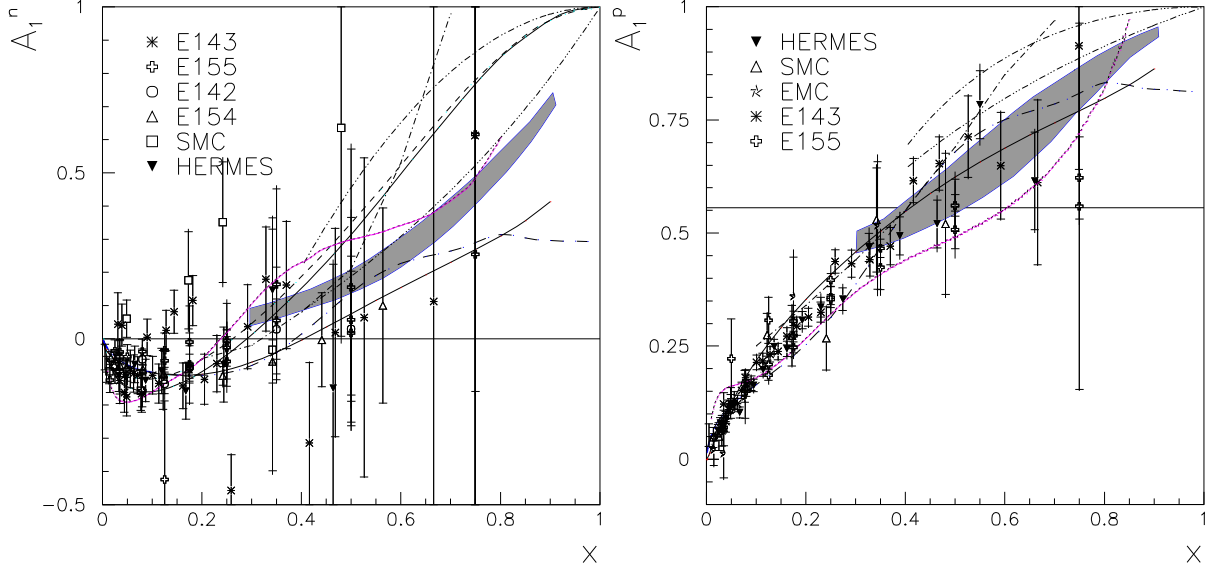


Abbildung 4.3: Weltdaten zu den Spin-Asymmetrien A_1 und A_2 und verschiedene theoretische Vorhersagen und Fitfunktionen, siehe [43, 52] in Verbindung mit u.a. [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51].

$$e_{\gamma,\mu}^X = \frac{\left(l_\mu - P_\mu \frac{(2-y)Q^2}{(s-m_N^2)\left(y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}\right)} - \frac{y + \frac{2m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}} q_\mu \right)}{\sqrt{\frac{\left(1 - y - \frac{m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}\right)}{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}} Q^2}}. \quad (4.12)$$

Die Definitionen sind so gewählt, dass die Vektoren ein Orthonormalsystem bilden und demnach

$$e_{\gamma,\mu}^L \cdot e_{\gamma,\mu}^{X,\mu} = e_{\gamma,\mu}^L \cdot e_{\gamma,\mu}^{Y,\mu} = e_{\gamma,\mu}^Y \cdot e_{\gamma,\mu}^{X,\mu} = 0 \quad (4.13)$$

erfüllen. Entsprechend erhält man für die Kontraktionen der Polarisationsvektoren mit dem leptonischen Tensor

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^L \cdot e_{\gamma,\nu}^L &= 4Q^2 \left(\frac{1 - y - \frac{m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}} \right), \\ L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^Y \cdot e_{\gamma,\nu}^Y &= Q^2, \\ L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^X \cdot e_{\gamma,\nu}^X &= Q^2 \frac{(2-y)^2}{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}, \\ L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^X \cdot e_{\gamma,\nu}^Y &= -\frac{i\lambda(2-y)Q^2}{\sqrt{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}}, \\ L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^L \cdot e_{\gamma,\nu}^X &= L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^X \cdot e_{\gamma,\nu}^L = -\frac{(2-y)Q^2}{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}} \sqrt{1 - y - \frac{m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^Y \cdot e_{\gamma,\nu}^X &= -L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^X \cdot e_{\gamma,\nu}^Y, \\
L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^L \cdot e_{\gamma,\nu}^Y &= 2i\lambda Q^2 \sqrt{\frac{1-y-\frac{m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}}, \\
L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^L \cdot e_{\gamma,\nu}^Y &= -L^{\mu\nu} \cdot e_{\gamma,\mu}^Y \cdot e_{\gamma,\nu}^L.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Im Laborsystem ist dann

$$\varepsilon = \left[1 + 2 \frac{\vec{q}^2}{Q^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \tag{4.15}$$

und für ε ergibt sich dann durch y ausgedrückt

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \left[1 + 2 \frac{(s-m_N^2)}{4m_N^2} \left(y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2} \right) \frac{m_N^2}{(s-m_N^2)} \frac{1}{1-y-\frac{m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}} \right]^{-1} \\
&= \frac{2(1-y-\frac{m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2})}{1+(1-y)^2 + \frac{2m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Durch Bildung der Kombinationen

$$\begin{aligned}
1 + \varepsilon &= \frac{(2-y)^2}{1+(1-y)^2 + \frac{2m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}, \\
\sqrt{\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2}} &= \frac{(2-y) \sqrt{1-y-\frac{m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}}{1+(1-y)^2 + \frac{2m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}, \\
1 - \varepsilon &= \frac{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}{1+(1-y)^2 + \frac{2m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}, \\
\sqrt{1-\varepsilon^2} &= \frac{(2-y) \sqrt{y^2 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}}{1+(1-y)^2 + \frac{2m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2}}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ergibt sich für die Kontraktion

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} &= \frac{2Q^2 \left[1 + (1-y)^2 + \frac{2m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2} \right]}{y^2 \left[1 + \frac{4m_N^2 Q^2}{(s-m_N^2)^2 y^2} \right]} \times \\
&\quad \left\{ \frac{M^{XX} + M^{YY}}{2} + \varepsilon \frac{M^{XX} - M^{YY}}{2} \cos(2\phi_\pi) + \varepsilon M^{LL} + \sqrt{\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2}} (M^{LX} + M^{XL}) \cos(\phi_\pi) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{M^{XX}-M^{YY}}{2} + i\lambda\sqrt{\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}}(M^{LY}+M^{YL})\sin(\phi_\pi) \Big\} \\
 & = 2Q^2\frac{1}{1-\varepsilon} \times \\
 & \quad \left\{ \frac{M^{XX}+M^{YY}}{2} + \varepsilon\frac{M^{XX}-M^{YY}}{2}\cos(2\phi_\pi) + \varepsilon M^{LL} + \sqrt{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\frac{(M^{LX}+M^{XL})}{2}\cos(\phi_\pi) \right. \\
 & \quad \left. + i\lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{M^{XX}-M^{YY}}{2} + i\lambda\sqrt{2\varepsilon(1-\varepsilon)}\frac{(M^{LY}+M^{YL})}{2}\sin(\phi_\pi) \right\}, \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

wobei λ die Strahlhelizität ist.

Traditionell wird der differentielle Streuquerschnitt dann in folgender faktorisierten Form geschrieben:

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega'} = \Gamma_t d\sigma_{\gamma^*} \tag{4.19}$$

und

$$\Gamma_t = \frac{\alpha_{\text{em}}}{(2\pi)^2} \frac{W^2 - m_N^2}{m_N Q^2} \frac{E'}{E} \frac{1}{1-\epsilon} \tag{4.20}$$

ist der virtuelle Photonenflux. Gemäß (4.18) schreiben wir dann

$$d\sigma_{\gamma^*} = \frac{\alpha_{\text{em}}}{8\pi} \frac{k_f}{W} \frac{d\Omega_\pi}{W^2 - m_N^2} |\mathcal{M}_{\gamma^*}|^2, \tag{4.21}$$

mit

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_{\gamma^*}|^2 &= M_T + \epsilon M_L + \sqrt{2\epsilon(1+\epsilon)} M_{LT} \cos(\phi_\pi) \\
 &+ \epsilon M_{TT} \cos(2\phi_\pi) + \lambda \sqrt{2\epsilon(1-\epsilon)} M'_{LT} \sin(\phi_\pi),
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei der Streuquerschnitt $d\sigma_T$ etc., nur von den Invarianten des $\gamma^* p \rightarrow \pi N$ Subprozesses abhängt.

Für die Näherung $M_{TT} = 0$ werden im Folgenden die Ergebnisse zu den polarisierten Amplituden angegeben. Dabei wird auf die exakten Ergebnisse verzichtet, da sie sehr komplex und lang sind. Daher seien nur die führenden Ergebnisse im chiralen Limes $m_\pi \rightarrow 0$ zusammen mit $k_f = \mathcal{O}(m_\pi)$ angegeben:

$$\begin{aligned}
 f_\pi^2 M_T &= \frac{4\vec{k}_i^2 Q^2}{m_N^2} |G_1^{\pi N}|^2 + \frac{c_\pi^2 g_A^2 \vec{k}_f^2}{(W^2 - m_N^2)^2} Q^2 m_N^2 G_M^2 + \cos\theta \frac{c_\pi g_A |k_i| |k_f|}{W^2 - m_N^2} 4Q^2 G_M \text{Re } G_1^{\pi N}, \\
 f_\pi^2 M_L &= \vec{k}_i^2 |G_2^{\pi N}|^2 + \frac{4c_\pi^2 g_A^2 \vec{k}_f^2}{(W^2 - m_N^2)^2} m_N^4 G_E^2 - \cos\theta \frac{c_\pi g_A |k_i| |k_f|}{W^2 - m_N^2} 4m_N^2 G_E \text{Re } G_2^{\pi N}, \\
 f_\pi^2 M_{LT} &= -\sin\theta \frac{c_\pi g_A |k_i| |k_f|}{W^2 - m_N^2} Q m_N \left[G_M \text{Re } G_2^{\pi N} + 4G_E \text{Re } G_1^{\pi N} \right], \\
 f_\pi^2 M_{TT} &= 0, \\
 f_\pi^2 M'_{LT} &= -\sin\theta \frac{c_\pi g_A |k_i| |k_f|}{W^2 - m_N^2} Q m_N \left[G_M \text{Im } G_2^{\pi N} - 4G_E \text{Im } G_1^{\pi N} \right].
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Es ist zu beachten, dass der Single Spin Asymmetrie-Beitrag $\sim M'_{LT}$ Imaginäranteile wegen der Final-State Interactions-Beiträge (FSI-Beiträge) in den verallgemeinerten Formfaktoren enthält. Prinzipiell ist

also (4.23) für komplexe $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ geschrieben, da die FSI komplexwertige Anteile erzeugen und durch die Substitution von

$$G_{1,2}^{\pi N}(Q^2) \rightarrow G_{1,2}^{\pi N}(Q^2, W) = G_{1,2}^{\pi N}(Q^2)[1 + i t_{\pi N}] \quad (4.24)$$

in (4.23) implementiert werden können. $t_{\pi N} = [\eta \exp(i\delta_{\pi N}) - 1]/(2i)$ steht für den Rückstreungsanteil des Pions mit dem Nukleon im Endzustand, zusammen mit der S-Wellen Phasenverschiebung $\delta_{\pi N}$ und dem Inelastizitätsparameter η . Die Bestimmung von $t_{\pi N}$ ist gegenwärtig Gegenstand experimenteller und theoretischer Untersuchungen. An dieser Stelle sei auf die Veröffentlichungen [53] und [54] verwiesen, in

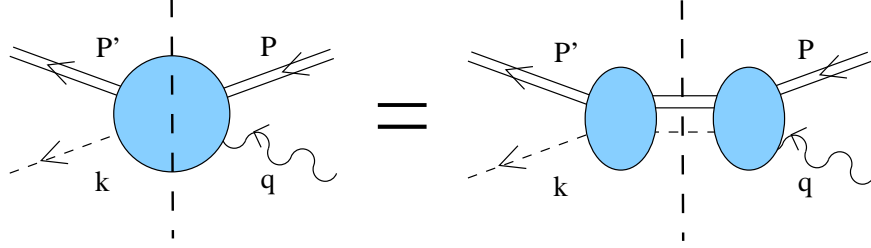


Abbildung 4.4: Darstellung der FSI-Beiträge aus der Rückstreuung des produzierten Pions mit dem auslaufenden Nukleon.

denen erste Schritte in diese Richtung getan wurden. Aufgrund dessen wird in dieser Arbeit auf die explizite Integration der FSI in das Modell verzichtet. Daher beschränken wir uns stets auf reelwertige $G_{1,2}^{\pi N}$. In unserer Näherung ist $M_{TT} = 0$ (exakt), weil im Modell keine D-Wellen mit in Betracht gezogen werden. Deshalb existiert kein $\cos(2\phi)$ Beitrag in (4.22) und das Modell stattet uns so indirekt mit einer quantitativen Abschätzung der Bedeutung der D-Wellen Beiträge aus. Mit Hilfe der Ergebnisse (4.23) erhalten wir für das Verhältnis aus longitudinalem zu transversalem Streuquerschnitt $R_{th} = \sigma_L^*/\sigma_T^*$ im chiralen Limes von $m_\pi \rightarrow 0$

$$R_{th} = \lim_{W \rightarrow W_{th}} R = \left(\frac{m G_2^{\pi N}}{2Q G_1^{\pi N}} \right)^2. \quad (4.25)$$

4.3 Verbindung zu $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$ in der PWA

Der Threshold Streuquerschnitt lässt sich schreiben wie:

$$\frac{d\sigma_{\gamma^*}}{d\Omega_\pi} \Big|_{th} = \frac{2|\vec{k}_f|W}{W^2 - m_N^2} \left[(E_{0+}^{\pi N})^2 + \epsilon \frac{Q^2}{(\omega_\gamma^{th})^2} (L_{0+}^{\pi N})^2 \right], \quad (4.26)$$

wobei $\omega_\gamma^{th} = (m_\pi(2m_N + m_\pi) - Q^2)/(2(m_N + m_\pi)) \simeq -Q^2/(2m_N)$ die Photonenergie im c.m. System ist. Durch Vergleich des Ausdrucks (4.26) mit dem rechnerischen Ergebnis (4.23) erhält man nach einiger Rechnung die Relationen

$$\begin{aligned} E_{0+}^{\pi N} &= \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{8\pi f_\pi} Q^2 \sqrt{\frac{((2M + m_\pi)^2 + Q^2)}{M^3(M + m_\pi)^3}} \left(G_1^{\pi N} - \frac{M m_\pi}{(2Q^2)} G_2^{\pi N} \right), \\ L_{0+}^{\pi N} &= \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{8\pi f_\pi} \frac{(\omega_\gamma^{th} M)}{2} \sqrt{\frac{((2M + m_\pi)^2 + Q^2)}{M^3(M + m_\pi)^3}} \left(G_2^{\pi N} + \frac{2m_\pi}{M} G_1^{\pi N} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Sie ermöglichen eine Beziehung zwischen den Threshold Multipolen und den beiden Formfaktoren. α_{em} ist die elektromagnetische Kopplungskonstante. Im chiralen Limes von $m_\pi \rightarrow 0$ ergeben sich die einfachen

Gleichungen

$$\begin{aligned} E_{0+}^{\pi N} &= \frac{\sqrt{4\pi\alpha_{\text{em}}}}{8\pi} \frac{Q^2 \sqrt{Q^2 + 4m_N^2}}{m_N^3 f_\pi} G_1^{\pi N}, \\ L_{0+}^{\pi N} &= \frac{\sqrt{4\pi\alpha_{\text{em}}}}{32\pi} \frac{Q^2 \sqrt{Q^2 + 4m_N^2}}{m_N^3 f_\pi} G_2^{\pi N} \end{aligned} \quad (4.28)$$

und für die $G_i^{\pi N}$ können die LET Ausdrücke (3.46) eingesetzt werden.

Im Grenzfall der Photoproduktion ($Q^2 = 0$) ergibt sich $E_{0+}^{\pi^+ n} \sim g_A$ und $E_{0+}^{\pi^0 p} = 0$, sodass offensichtlich viel mehr π^+ als π^0 auf der Threshold produziert werden.

4.4 Zusammenfassung des Kapitels

Innerhalb von Kap. 4 wurde dazu übergegangen physikalische Größen zu berechnen. Durch Verwendung des Soft-Pion Theorems für Off-Threshold Pionen erweiterten wird das Modell und erlaubten so den Pionen einen Impulsbruchteil $\sim \delta P'$ zu tragen. Die Ergebnisse zu den Strukturfunktionen und der Streuquerschnitte wurden präsentiert. Aufgrund unterschiedlicher Modelle stellte Abb. 4.1 die Werte für F_2^n/F_2^p dar. Wegen der schwierigen Extraktion von F_2^n ergeben sich stark unterschiedliche, modellabhängige Ergebnisse. Nichtsdestotrotz hat sich in der Vergangenheit das Modell nach Melnitchouk et. al. durchgesetzt.

Indem wir den Threshold-Streuquerschnitt durch die Threshold-Multipole ausdrücken konnten, war es uns möglich, Gleichungen aufzustellen, welche $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$ mit $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ in Verbindung bringen. Im chiralen Limes $m_\pi \rightarrow 0$ vereinfacht sich das Ergebnis drastisch und es entstehen die einfachen Beziehungen von $E_{0+}^{\pi N} \sim G_1^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N} \sim G_2^{\pi N}$. Für die $G_i^{\pi N}$ können dann die LET Resultate (3.46) eingesetzt werden.

5

Pion-Elektroproduktion bei großen Energieüberträgen

Innerhalb der letzten zehn Jahre kam es zu einer interessanten Entwicklung, da von diesem Zeitpunkt an Threshold Pion-Elektroproduktion nicht mehr nur im Bereich sehr kleiner GeV, sondern nunmehr im Bereich einiger GeV, gemessen werden konnte. Die technische Entwicklung führte so zu einer rasanten theoretischen Entwicklung innerhalb der QCD, da die CHPT nur bis etwa $Q = \mathcal{O}(m_\pi)$ gültig ist. Jenseits dessen brechen die Theorie mit ihren Modellen zusammen. Dies machte es notwendig, Modelle zu entwickeln, welche für mittlere und größere Q^2 anwendbar sind. Für große Q^2 , also harte Streuprozesse, machen es sog. *Faktorisierungstheoreme* möglich, harte von weichen Beiträgen zu unterscheiden. Grundsätzliche Ideen dazu wurden in [55, 56] vorgestellt. Darin wurde ein Faktorisierungsansatz vorgeschlagen, welcher für asymptotisch große Q^2 die Amplitude eines exklusiven Streuprozesses im Rahmen der perturbativen QCD (pQCD) in ein Produkt aus Streukern T_H und Wellenfunktion zerlegt. Mit Hilfe des Streukerns T_H wurden harte, durch Gluonaustausch unter den streuenden Quarks generierte, Streubeiträge berechnet. Prinzipiell lässt sich das Modell wie

$$A(\gamma^* N \rightarrow N') = \int dx dy \Phi_{N'}^*(x) T_H(x, y, Q^2) \Phi_N(y), \quad (5.1)$$

wobei $T_H(x, y, Q^2)$ der Streukern ist und Φ die jeweilige Wellenfunktion des Zustandes. Innerhalb einer störungstheoretischen Expansion in $(\alpha_s(Q)/2\pi)^2$ dominieren für asymptotisch große Q^2 die faktorisierbaren Beiträge, da die harten die weichen (soften) Beiträge für große Virtualitäten des Photons zu dominieren beginnen.

5.1 Faktorisierung in der Pion-Elektroproduktion

Faktorisierungstheoreme spielen in der QCD eine wichtige Rolle, da über sie physikalische Observablen direkt berechnet werden können. Wichtigster Baustein im Zusammenhang mit Faktorisierung ist, wie bereits obig erwähnt, der Streukern, welcher vor allem den harten Gluonaustausch unter den Quarks in Betracht zieht. Weiche Beiträge sind in solch hohen Energieregimen unterdrückt. Aus dem QCD Faktorisierungstheorem [55, 56, 57, 58, 59] folgt unmittelbar, dass eine physikalische Observable, wie z.B. die Strukturfunktion F_2^p des Protons, für große Q^2 , in der faktorierten Form als Konvolution von Kern $T_H(x, y, Q^2)$ mit den

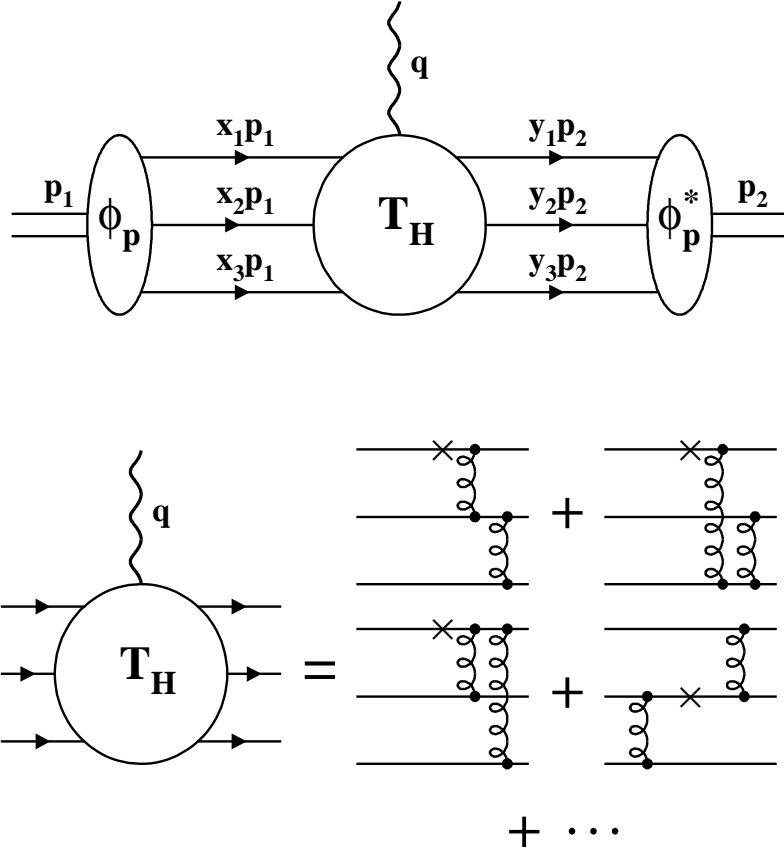


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des harten Streuvorgangs am Beispiel von $\gamma^* N \rightarrow N$. Dabei zerlegt sich die Amplitude in einen nicht-perturbativen (Amplituden) und einen perturbativen Anteil (Streukern).

Distributionsamplituden geschrieben werden kann,

$$F_2^p(\gamma^* N \rightarrow N' \pi) = \int dx dy \Phi_{N' \pi}^*(x) T_H(x, y, Q^2) \Phi_N(y). \quad (5.2)$$

Die Funktionen $\Phi_N(y)$, $\Phi_{\pi N'}(x)$ sind Distributionsamplituden des einlaufenden und auslaufenden Zustands. Die Amplitude (5.2) zerlegt sich also, oder wird faktorisiert. Die wichtigste Voraussetzung für die Anwendbarkeit der pQCD Faktorisierung ist sowohl die große Virtualität des ausgetauschten Gluons, als auch jene zwischen den Quarks im Nukleon. Der harte Gluonaustausch ist durch den üblichen Faktor α_s/π unterdrückt. α_s/π entsteht durch jeden extra Loop und ist somit für die Unterdrückung bei kleinen Energien verantwortlich. Sehen wir uns als Beispiel den baryonischen Formfaktor F_1 des Nukleons an.

$$F_1(Q^2) \sim A(Q^2) + \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right) \frac{B(Q^2)}{Q^2} + \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right)^2 \frac{C}{Q^4} + \dots, \quad (5.3)$$

wobei die weichen Funktionen $A(Q^2)$ und $B(Q^2)$ rein nicht-perturbativ sind und nicht durch Faktorisierung weiter vereinfacht werden können. Erst ab dem dritten Term von (5.3) $\propto \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right)^2$ findet Faktorisierung statt. Abschätzungen haben ergeben, dass sich die Koeffizienten wie $A(Q^2) \lesssim 1/Q^6$, $B(Q^2) \lesssim 1/Q^4$ verhalten. Es kann leicht erkannt werden, dass für große Q^2 die ersten beiden Terme stets kleiner werden und

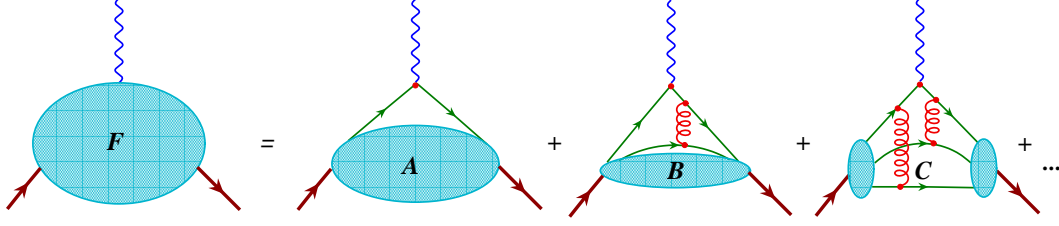


Abbildung 5.2: Struktur der QCD Faktorisierung von Baryon Formfaktoren.

gleichzeitig der dritte Term aus (5.3) immer bedeutender und letztendlich dominant wird. Der Koeffizient C wiederum kann mit einem Faktorisierungsansatz berechnet werden. Für große Q^2 findet also Faktorisierung statt. Im Rahmen der Untersuchungen zur PEp ist dabei ganz besonders die Arbeit [57] zu erwähnen, in

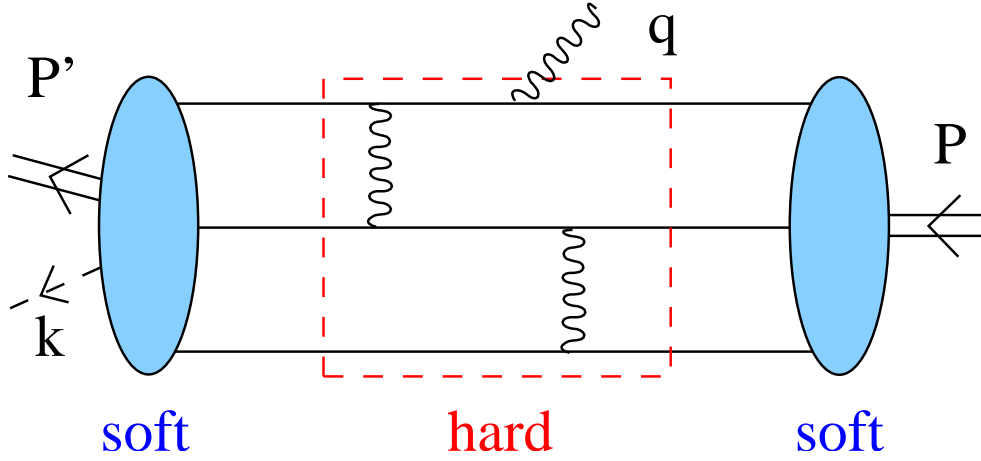


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung des harten Streuvorgangs in der PEp. Entsprechend (5.2) zerlegt sich dabei die Amplitude in einen nicht-perturbativen (Amplituden) und einen perturbativen Anteil (Streukern).

der die exklusive Strukturfunktion F_2^p für große x unter Anwendung des Faktorisierungstheorems berechnet worden ist. Dabei ergab sich für F_2^p [57]

$$F_2^p(W, Q^2) = \frac{Q^2 \beta(W)}{(4\pi)^2} \left[\sum_{X=p\pi^0, n\pi^+} |A(\gamma^* p \rightarrow X)|_{\text{th}}^2 + \frac{3g_A^2 G_{Mp}^2(Q^2) \beta^2(W) W^4}{4(W^2 - M_N^2 + m_\pi^2)^2} + O\left(\frac{m_\pi}{\Lambda}\right) \right], \quad (5.4)$$

wobei die einzelnen $p \rightarrow \pi N$ Amplituden sich grundsätzlich ergeben zu [57]:

$$\begin{aligned} Q^4 A(\gamma^* p \rightarrow \pi^0 p)|_{\text{th}} = & \frac{(16\pi\alpha_s)^2}{9f_\pi} \int [dx dy] \left\{ \frac{1}{9} (23T_1 - 8T_2) \phi_S(x) \phi_S(y) \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} T_1 [\phi_S(x) \phi_A(y) + \phi_S(y) \phi_A(x)] \\ & \left. - \frac{1}{3} (T_1 + 2T_2) \phi_A(y) \phi_A(x) \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
 Q^4 A(\gamma^* p \rightarrow \pi^+ n)|_{\text{th}} = & \frac{(16\pi\alpha_s)^2}{9\sqrt{2}f_\pi} \int [dx \, dy] \left\{ \frac{2}{9} \left(11T_1 + 4T_2 \right) \phi_S(x)\phi_S(y) \right. \\
 & - \frac{2}{\sqrt{3}} T_1 \left[\phi_S(x)\phi_A(y) + \phi_S(y)\phi_A(x) \right] \\
 & \left. - \frac{2}{3} \left(T_1 + 2T_2 \right) \phi_A(y)\phi_A(x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dabei ist $[dx] = dx_1 dx_2 dx_3 \, \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)$ und die T_1 und T_2 haben die Form [55]:

$$T_1 = \frac{1}{x_3(1-x_1)^2 y_3(1-y_1)^2} + \frac{1}{x_2(1-x_1)^2 y_2(1-y_1)^2} \tag{5.7}$$

$$- \frac{1}{x_2 x_3 (1-x_3) y_2 y_3 (1-y_1)},$$

$$T_2 = \frac{1}{x_1 x_3 (1-x_1) y_1 y_3 (1-y_3)}. \tag{5.8}$$

Weitere Ergebnisse zu anderen physikalischen Größen sind u.a. in [55, 60, 61] berechnet worden. Analog wurden für $n \rightarrow \pi N$ folgende Ausdrücke errechnet [57]:

$$\begin{aligned}
 Q^4 A(\gamma^* n \rightarrow \pi^0 n)|_{\text{th}} = & \frac{(16\pi\alpha_s)^2}{9f_\pi} \int [dx \, dy] \left\{ \frac{13}{9} \left(T_1 - T_2 \right) \phi_S(x)\phi_S(y) \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}} T_1 \left[\phi_S(x)\phi_A(y) + \phi_S(y)\phi_A(x) \right] \\
 & \left. + \frac{1}{3} \left(T_1 - T_2 \right) \phi_A(y)\phi_A(x) \right\},
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
 Q^4 A(\gamma^* n \rightarrow \pi^- p)|_{\text{th}} = & \frac{(16\pi\alpha_s)^2}{9\sqrt{2}f_\pi} \int [dx \, dy] \left\{ -\frac{2}{9} \left(T_1 - T_2 \right) \phi_S(x)\phi_S(y) \right. \\
 & + \frac{2}{\sqrt{3}} T_1 \left[\phi_S(x)\phi_A(y) + \phi_S(y)\phi_A(x) \right] \\
 & \left. - \frac{2}{3} \left(T_1 - T_2 \right) \phi_A(y)\phi_A(x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Unter Verwendung asymptotischer Distributionsamplituden war es möglich die Amplituden direkt durch Nukleon Formfaktoren auszudrücken [57]:

$$A(\gamma^* p \rightarrow \pi^0 p)|_{\text{th}} = -\frac{1}{f_\pi} \left(\frac{5}{6} G_{Mp} - \frac{4}{3} G_{Mn} \right), \tag{5.11}$$

$$A(\gamma^* p \rightarrow \pi^+ n)|_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{2}f_\pi} \left(\frac{5}{3} G_{Mp} + \frac{4}{3} G_{Mn} \right), \tag{5.12}$$

$$A(\gamma^* n \rightarrow \pi^0 n)|_{\text{th}} = -\frac{13}{6f_\pi} G_{Mn}, \tag{5.13}$$

$$A(\gamma^* n \rightarrow \pi^- p)|_{\text{th}} = \frac{G_{Mn}}{3\sqrt{2}f_\pi}. \tag{5.14}$$

5.2. ZUSAMMENFASSUNG DES KAPITELS

Die Ergebnisse ergaben eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit dem SLAC E136 Experiment, vor allem in Bezug auf das Skalierungsverhalten.

$$\int_{\text{th}}^{1.4} dW^2 Q^6 F_2^p(W, Q^2) = \begin{cases} 0.10 \pm 0.02 \text{ GeV}^8 & (\text{E136}) \\ 0.11 \pm 0.02 \text{ GeV}^8 & (\text{hSPT}). \end{cases} \quad (5.15)$$

Im Gegensatz dazu ergab sich im Limes von $x \rightarrow 1$ für

$$F_2^n / F_2^p = 52/37, \quad (5.16)$$

was weit weg von der partonischen Vorhersage von $2/3$ ist.

Allerdings hat bisher ein Modell gefehlt, welches die Lücke zwischen der CHPT und der Faktorisierung im Rahmen der pQCD schloß. Für Q^2 im Bereich von $1 - 10 \text{ GeV}^2$ kann man sich überzeugen, dass nicht-faktorisierbare, weiche Beiträge dominant sind. In dieser Arbeit soll ein Modell vorgestellt werden, welches die PEp nahe der Threshold beschreibt. Bereits in [62] wurde ein Modell vorgeschlagen, welches auf Basis einer Lichtkegelexpansion und mit Hilfe von LCSR Formfaktoren des Nukleons im Bereich mittlerer Q^2 beschrieb. Der gleiche Formalismus kann im Rahmen der PEp angewandt werden. Dabei wurden in der Arbeit [2] LCSR für die Pionproduktion exakt auf der Threshold und im Bereich von $Q^2 \sim 5 - 10 \text{ GeV}^2$ berechnet. Erweitert wurde das Modell anschließend in Energiebereiche von $1 - 10 \text{ GeV}^2$ in der Arbeit [3]. Im Besonderen wurden in [3] Beiträge miteinbezogen, welche durch πN Zwischenzustände produziert werden. Abhängig vom Schnitt * im Diagramm, spricht man entsprechend von *semi-disconnected* Beiträgen. Zusätzlich gestattete uns das Modell [3] eine Erweiterung zu soften Pionen mit $k_\mu = \delta P'_\mu$ und $k \sim \mathcal{O}(m_\pi)$. Wobei δ der Proportionalitätsfaktor zwischen Pionimpuls und Impuls des auslaufenden Nukleons ist. Insofern wird also eine Formalismus vorgestellt, welcher das Spektrum von kleineren zu moderaten (also von $Q^2 \sim 1 - 10 \text{ GeV}^2$) Energien innerhalb von LCSR abdeckt und gleichzeitig Terme mit kleinem k mit in die Berechnung einbezieht.

5.2 Zusammenfassung des Kapitels

Innerhalb von Kap. 5 wurde in die Methodik der Faktorisierung eingeführt. Für große Impulsüberträge kann eine Amplitude gemäß dem Faktorisierungstheorem in einen ein- und auslaufenden Zustand und einen Streukern T_H zerlegt werden. Die Hauptrolle spielt dabei stellt der Streukern T_H , welcher den harten Gluonaustausch mit und unter den Quarks beschreibt. Weiche Beiträge sind in diesem Energieregime stets stark unterdrückt. Eine bildliche Veranschaulichung der störungstheoretischen Expansion in α_s ist in Abb. 5.2 gegeben. Für die Darstellung des Streukerns T_H sind Abb. 5.1 und Abb. 5.3 geeignet. Ein und ausgehender Zustand werden stets durch eine geeignete Wellenfunktion (bzw. Distributionsamplituden) beschrieben. Bei Wahl der einfachsten Distributionsamplituden, der asymptotischen, ergab sich in diesem Zusammenhang für F_2^p eine sehr gute Übereinstimmung mit dem SLAC E136 Experiment, siehe [57].

*zu Englisch: Cut

6

Nukleon Distributionsamplituden

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, welche trilokale Matrixelemente in verschiedene Lorentzstrukturen und korrespondierenden Amplituden expandiert. Die Amplituden werden im Allgemeinen als Nukleon Distributionsamplituden (DAs) bezeichnet.

6.1 Allgemeine Definition der DAs

Allgemein sei die Fouriertransformierte einer Wellenfunktion definiert mit

$$\Phi(x, b_\perp) = \int dk_\perp \Psi(x, k_\perp) e^{ik_\perp b_\perp} . \quad (6.1)$$

Dabei ist k_\perp der Transversalimpuls und b_\perp der Transversalabstand. Entsprechend ist mit $b_\perp = 0$ eine DA $\Phi(x, 0)$ festgelegt mit

$$\Phi(x, 0) = \int^{|k_\perp| < \mu} dk_\perp \Psi(x, k_\perp) e^{ik_\perp b_\perp} . \quad (6.2)$$

Im Übergang $b \rightarrow 0$ entstehen Divergenzen, sodass wir eine Skala einführen müssen, welche uns das Integral abschneidet*. In (6.2) übernimmt diese Rolle die Skala μ . Dies hat zur Folge, dass jede DAs skalenabhängig ist.

Das für uns interessante Objekt ist nun des trilokale Matrixelement der Form [62, 63]:

$$\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^{i'}(a_1 z) [a_1 z, a_0 z]_{i', i} u_\beta^{j'}(a_2 z) [a_2 z, a_0 z]_{j', j} d_\gamma^{k'}(a_3 z) [a_3 z, a_0 z]_{k', k} | p(P, \lambda) \rangle , \quad (6.3)$$

wobei $|p(P, \lambda)\rangle$ der Protonenzustand mit Impuls P ist, $P^2 = M^2$ und die Helizität sei mit λ bezeichnet. Die Felder $u_\alpha^{i'}(a_1 z)$ und $d_\gamma^{k'}(a_3 z)$ sind die entsprechenden Quarkfelder. Die α, β, γ stehen für die Diracindizes,

*zu Englisch: Cutoff

i, j, k sind die Farbindices. z ist der Lichtkegelvektor, welcher der Bedingung $z^2 = 0$ genügt und die Koeffizienten a_i sind reelwertige Zahlen. Mit der abgekürzten Notation $[x, y]$ bezeichnen wir Eichfaktoren, welche sich ausgeschrieben wie

$$[x, y] = \text{P exp} \left[ig \int_0^1 dt (x - y)_\mu A^\mu(tx + (1 - t)y) \right] \quad (6.4)$$

lesen. Sie halten (6.3) stets eichinvariant. Um die Schreibweise und Notation zu vereinfachen, sei von nun an auf die explizite Angabe der Eichfaktoren (6.4) verzichtet. Sie sind jedoch immer vorhanden.

Das Matricelement kann nun mit Hilfe von 24 verschiedenen Amplituden, den Nukleon DAs, dargestellt werden. Unter Berücksichtigung von Spin, Parität, Lorentzkovarianz schreibt sich (6.3) dann wie [62, 63]:

$$\begin{aligned} & 4 \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 x) u_\beta^j(a_2 x) d_\gamma^k(a_3 x) | p(P, \lambda) \rangle \\ &= \mathcal{S}_1 m_N C_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{S}_2 m_N^2 C_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{P}_1 m_N (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma + \mathcal{P}_2 m_N^2 (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\not{x} N)_\gamma \\ &+ \left(\mathcal{V}_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{V}_1^M \right) (PC)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_2 m_N (PC)_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_3 m_N (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma \\ &+ \mathcal{V}_4 m_N^2 (\not{x} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_5 m_N^2 (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (i\sigma^{\mu\nu} x_\nu \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_6 m_N^3 (\not{x} C)_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 N)_\gamma \\ &+ \left(\mathcal{A}_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{A}_1^M \right) (P\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma + \mathcal{A}_2 m_N (P\gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\not{x} N)_\gamma + \mathcal{A}_3 m_N (\gamma_\mu \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu N)_\gamma \\ &+ \mathcal{A}_4 m_N^2 (\not{x} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma + \mathcal{A}_5 m_N^2 (\gamma_\mu \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (i\sigma^{\mu\nu} x_\nu N)_\gamma + \mathcal{A}_6 m_N^3 (\not{x} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\not{x} N)_\gamma \\ &+ \left(\mathcal{T}_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{T}_1^M \right) (P^\nu i\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_2 m_N (x^\mu P^\nu i\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma \\ &+ \mathcal{T}_3 m_N (\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_4 m_N (P^\nu \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu e} x_e \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_5 m_N^2 (x^\nu i\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma \\ &+ \mathcal{T}_6 m_N^2 (x^\mu P^\nu i\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\not{x} \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_7 m_N^2 (\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} \not{x} \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_8 m_N^3 (x^\nu \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu e} x_e \gamma_5 N)_\gamma, \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei N der Nukleonspinor und C der Ladungsoperator ist. Die $F_i = S, P, A, V, T$ sind die entsprechenden DAs und $\mathcal{V}_1^M, \mathcal{A}_1^M, \mathcal{T}_1^M$ sind Off-Lichtkegel Korrekturen, siehe Anhang D. In (6.5) kommen nur solche Lorentzstrukturen vor, welche eine vollständige Basis zur Entwicklung der Wellenfunktion darstellen und voneinander unabhängig sind.

Für einen Vierervektor z definieren wir

$$z^\mu = (z^0, z^3, z^1, z^2) =: (z^+, z^-, z^\perp), \quad (6.6)$$

wobei $z^+ = z^0 + z^3$ die Zeitkomponente, $z^- = z^0 - z^3$ die Longitudinalkomponente und $z^\perp = (z^1, z^2)$ die Transversalkomponente ist.

Entsprechend haben wir dann für ein Skalarprodukt zweier Lichtkegelvektoren z_1, z_2

$$z_1 \cdot z_2 = z_1^0 z_2^0 - z_1^3 z_2^3 - z_1^\perp z_2^\perp. \quad (6.7)$$

Zusammen mit den beiden Spin 1/2 Projektoren

$$\Lambda^+ = \frac{\not{p} \not{z}}{2p \cdot z}, \quad \Lambda^- N = \frac{\not{z} \not{p}}{2p \cdot z} \quad (6.8)$$

6.1. ALLGEMEINE DEFINITION DER DAS

ist der Nukleonspinor N mit

$$\Lambda^+ N = N^+ \quad (6.9)$$

in die Spin $+1/2$ Komponente des Spinors und entsprechend mit

$$\Lambda^- N = N^- \quad (6.10)$$

in die Spin $-1/2$ Komponente des Spinors aufteilbar. Es gilt trivialerweise folglich

$$N = N^+ + N^- . \quad (6.11)$$

Für die Spinoren N^+ und N^- gilt zusätzlich:

$$\begin{aligned} \Lambda^+ N &= N^+ \sim \sqrt{p^+} , \\ \Lambda^- N &= N^- \sim 1/\sqrt{p^+} . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Entsprechend kann (6.5) in die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} &4 \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 z) u_\beta^j(a_2 z) d_\gamma^k(a_3 z) | p(P, \lambda) \rangle = \\ &= S_1 m_N C_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^+)_{\gamma} + S_2 m_N C_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^-)_{\gamma} + P_1 m_N (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_{\gamma}^+ + P_2 m_N (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_{\gamma}^- \\ &+ V_1 (\not{p} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^+)_{\gamma} + V_2 (\not{p} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^-)_{\gamma} + \frac{V_3}{2} m_N (\gamma_{\perp} C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} \gamma_5 N^+)_{\gamma} \\ &+ \frac{V_4}{2} m_N (\gamma_{\perp} C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} \gamma_5 N^-)_{\gamma} + V_5 \frac{m_N^2}{2pz} (\not{z} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^+)_{\gamma} + \frac{m_N^2}{2pz} V_6 (\not{z} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^-)_{\gamma} \\ &+ A_1 (\not{p} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_{\gamma}^+ + A_2 (\not{p} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_{\gamma}^- + \frac{A_3}{2} m_N (\gamma_{\perp} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} N^+)_{\gamma} \\ &+ \frac{A_4}{2} m_N (\gamma_{\perp} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} N^-)_{\gamma} + A_5 \frac{m_N^2}{2pz} (\not{z} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_{\gamma}^+ + \frac{m_N^2}{2pz} A_6 (\not{z} \gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_{\gamma}^- \\ &+ T_1 (i\sigma_{\perp p} C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} \gamma_5 N^+)_{\gamma} + T_2 (i\sigma_{\perp p} C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} \gamma_5 N^-)_{\gamma} + T_3 \frac{m_N}{pz} (i\sigma_{pz} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^+)_{\gamma} \\ &+ T_4 \frac{m_N}{pz} (i\sigma_{zp} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^-)_{\gamma} + T_5 \frac{m_N^2}{2pz} (i\sigma_{\perp z} C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} \gamma_5 N^+)_{\gamma} + \frac{m_N^2}{2pz} T_6 (i\sigma_{\perp z} C)_{\alpha\beta} (\gamma^{\perp} \gamma_5 N^-)_{\gamma} \\ &+ m_N \frac{T_7}{2} (\sigma_{\perp \perp'} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\perp \perp'} \gamma_5 N^+)_{\gamma} + m_N \frac{T_8}{2} (\sigma_{\perp \perp'} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\perp \perp'} \gamma_5 N^-)_{\gamma} \\ &=: \sum_i \Gamma^{\alpha\beta} \Gamma^{\gamma} F_i(1, 2, 3) , \end{aligned} \quad (6.13)$$

umgeschrieben werden. Dabei entspricht (6.13) der eigentlichen Definition der DAs. Hierbei ist $\sigma_{pz} = \sigma_{\mu\nu} p^{\mu} z^{\nu}$, \perp die jeweilige transversale Projektion und p ist definiert mit

$$p_{\mu} = P_{\mu} - \frac{1}{2} z_{\mu} \frac{m_N^2}{p \cdot z} , \quad p^2 = 0 . \quad (6.14)$$

Zusätzlich gilt

$$\mathcal{S}_1 = S_1 , \quad 2Px \mathcal{S}_2 = S_1 - S_2 , \quad \mathcal{P}_1 = P_1 , \quad 2Px \mathcal{P}_2 = P_2 - P_1 , \quad \mathcal{V}_1 = V_1 , \quad 2Px \mathcal{V}_2 = V_1 - V_2 - V_3 ,$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{V}_3 &= V_3, \quad 4Px\mathcal{V}_4 = -2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5, \quad 4Px\mathcal{V}_5 = V_4 - V_3, \\
4(Px)^2\mathcal{V}_6 &= -V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 - V_6, \quad \mathcal{A}_1 = A_1, \quad 2Px\mathcal{A}_2 = -A_1 + A_2 - A_3, \\
2\mathcal{A}_3 &= A_3, \quad 4Px\mathcal{A}_4 = -2A_1 - A_3 - A_4 + 2A_5, \quad 4Px\mathcal{A}_5 = A_3 - A_4, \\
4(Px)^2\mathcal{A}_6 &= A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6, \quad \mathcal{T}_1 = T_1, \quad 2Px\mathcal{T}_2 = T_1 + T_2 - 2T_3, \quad 2\mathcal{T}_3 = T_7, \\
2Px\mathcal{T}_4 &= T_1 - T_2 - 2T_7, \quad 2Px\mathcal{T}_5 = -T_1 + T_5 + 2T_8, \quad 4(Px)^2\mathcal{T}_6 = 2T_2 - 2T_3 - 2T_4 + 2T_5 + 2T_7 + 2T_8, \\
4Px\mathcal{T}_7 &= T_7 - T_8, \quad 4(Px)^2\mathcal{T}_8 = -T_1 + T_2 + T_5 - T_6 + 2T_7 + 2T_8
\end{aligned} \tag{6.15}$$

und jede DA $F = V_i, A_i, T_i, S_i, P_i$ kann geschrieben werden als

$$F(a_j, Px) = \int \mathcal{D}x e^{-iPx \sum_i x_i a_i} F(x_i). \tag{6.16}$$

Die Funktionen $F(x_i)$ hängen von der dimensionslosen Variablen x_i , $0 < x_i < 1$, $\sum_i x_i = 1$ ab. Jedes x_i steht für den longitudinalen Impulsbruchteil, welcher durch das Quark im Nukleon getragen wird. Dabei ist

$$\int \mathcal{D}x = \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1). \tag{6.17}$$

6.2 Klassifikation und Symmetrierelationen

Um die Expansionen (6.5) und (6.13) übersichtlicher zu charakterisieren, können die DAs in DAs definierten Twists unterteilt werden. Dies geschieht durch einfaches Zählen der Potenzen in $\sqrt{p^+}$. Allgemein gilt die Klassifikationsregel

$$\begin{aligned}
\sum_i \Gamma^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma &\propto (p^+)^{3/2} \implies \text{Twist} - 3, \\
\sum_i \Gamma^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma &\propto (p^+)^{1/2} \implies \text{Twist} - 4, \\
\sum_i \Gamma^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma &\propto (p^+)^{-1/2} \implies \text{Twist} - 5, \\
\sum_i \Gamma^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma &\propto (p^+)^{-3/2} \implies \text{Twist} - 6.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Die DAs vor jeder Struktur sind vom gleichen Twist. Für gewöhnlich bezeichnet man Beiträge vom Twist-3 als Beiträge führender Ordnung. Unter Anwendung einer Fierztransformation der Form

$$\begin{aligned}
(\Gamma C)_{\alpha\beta} (\Gamma' N)_\gamma &= \frac{1}{4} \left[C_{\gamma\beta} (\Gamma \Gamma' N)_\alpha + (\gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha \right. \\
&+ \frac{1}{p \cdot z} (\not{p} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{z} \Gamma' N)_\alpha + \frac{1}{p \cdot z} (\not{z} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{p} \Gamma' N)_\alpha + (\gamma_\perp C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^\perp \Gamma' N)_\alpha \\
&- \frac{1}{p \cdot z} (\not{p} \gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{z} \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha - \frac{1}{p \cdot z} (\not{z} \gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{p} \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha - (\gamma_\perp \gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^\perp \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha \\
&+ \frac{1}{(p \cdot z)^2} (\sigma_{pz} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \sigma_{zp} \Gamma' N)_\alpha + \frac{1}{2} (\sigma_{\perp\perp'} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \sigma^{\perp\perp'} \Gamma' N)_\alpha \\
&\left. + \frac{1}{p \cdot z} (i\sigma_{\perp p} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^\perp \not{z} \Gamma' N)_\alpha + \frac{1}{p \cdot z} (i\sigma_{\perp z} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^\perp \not{p} \Gamma' N)_\alpha \right]
\end{aligned} \tag{6.19}$$

6.2. KLASSIFIKATION UND SYMMETRIERELATIONEN

ergibt sich

$$\begin{aligned}
(v_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{2} (v_1 - a_1 - t_1)_{\alpha\beta,\gamma} , \\
(a_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{2} (-v_1 + a_1 - t_1)_{\alpha\beta,\gamma} , \\
(t_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= -(v_1 + a_1)_{\alpha\beta,\gamma} ,
\end{aligned} \tag{6.20}$$

wobei

$$\begin{aligned}
(v_1)_{\alpha\beta,\gamma} &= (\not{p}C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N^+)_{\gamma} , \\
(a_1)_{\alpha\beta,\gamma} &= (\not{p}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_{\gamma}^+ , \\
(t_1)_{\alpha\beta,\gamma} &= (i\sigma_{\perp p} C)_{\alpha\beta} \cdot (\gamma^\perp \gamma_5 N^+)_{\gamma} .
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Unter Verwendung von (6.20) ergeben sich so Isospinrelation zwischen Vektor und Axial-Vektor DAs [1, 62, 63]:

$$2T_1^p(1, 2, 3) = [V_1^p - A_1^p](1, 3, 2) + [V_1^p - A_1^p](2, 3, 1) . \tag{6.22}$$

Entsprechende Isospinrelationen existieren ebenso für die höheren Twists, siehe u.a. [1, 62, 63].

	Twist-3	Twist-4	Twist-5	Twist-6
Vektor	V_1	V_2, V_3	V_4, V_5	V_6
Axial-Vektor	A_1	A_2, A_3	A_4, A_5	A_6
Tensor	T_1	T_2, T_3, T_7	T_4, T_5, T_8	T_6
Skalar		S_1	S_2	
Pseudo-Skalar		P_1	P_2	

Tabelle 6.1: *Allgemeine Twist Klassifikation der Nukleon DAs.*

Da die Quarkoperatoren (6.5) und (6.13) symmetrisch unter Austausch der beiden ersten Indizes α und β sind, müssen natürlich ebenso definierte Symmetrierelationen für die einzelnen DAs gelten. Es ergibt sich

$$S_i(1, 2, 3) = S_i(2, 1, 3), \quad P_i(1, 2, 3) = -P_i(2, 1, 3), \quad A_i(1, 2, 3) = -A_i(2, 1, 3) \tag{6.23}$$

und

$$V_i(1, 2, 3) = V_i(2, 1, 3), \quad T_i(1, 2, 3) = T_i(2, 1, 3) . \tag{6.24}$$

6.3 Helizität

Führen wir den Helizitätsoperator

$$q^{\uparrow(\downarrow)} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)q \quad (6.25)$$

ein, so lassen sich die DAs sehr viel einfacher klassifizieren. Projiziert man antiparallele Spins auf die jeweiligen u Quarks, so reproduziert dies Vektor- und Axialvektor Amplituden heraus. Während dessen antiparallele Spins auf die beiden u-Quarks zu Skalar-, Pseudoskalar- und Tensoramplituden korrespondieren. Mit Hilfe von Symmetrierelationen und Spinoperatoren lassen sich nun die 24 DAs in einen vollständigen Satz aus 8 DAs reduzieren [63]. Die Amplituden Φ und Ψ sind voneinander unabhängig und werden durch

	Lorentzstruktur	Lichtkegelprojektion	Nomenklatur
Twist-3	$(C\not{k}) \otimes \not{k}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+$	$\Phi_3(x_i) = [V_1 - A_1](x_i)$
Twist-4	$(C\not{k}) \otimes \not{p}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^-$	$\Phi_4(x_i) = [V_2 - A_2](x_i)$
	$(C\not{k}\gamma_{\perp}\not{p}) \otimes \gamma^{\perp}\not{k}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\downarrow}^- d_{\downarrow}^+$	$\Psi_4(x_i) = [V_3 - A_3](x_i)$
	$(C\not{p}\not{k}) \otimes \not{k}$	$u_{\uparrow}^- u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+$	$\Xi_4(x_i) = [T_3 - T_7 + S_1 + P_1](x_i)$
Twist-5	$(C\not{p}) \otimes \not{k}$	$u_{\uparrow}^- u_{\downarrow}^- d_{\uparrow}^+$	$\Phi_5(x_i) = [V_5 - A_5](x_i)$
	$(C\not{p}\gamma_{\perp}\not{k}) \otimes \gamma^{\perp}\not{p}$	$u_{\uparrow}^- u_{\downarrow}^+ d_{\downarrow}^-$	$\Psi_5(x_i) = [V_4 - A_4](x_i)$
	$(C\not{p}) \otimes \not{p}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^- d_{\uparrow}^-$	$\Xi_5(x_i) = [T_4 - T_8 + S_2 + P_2](x_i)$
Twist-6	$(C\not{p}) \otimes \not{p}$	$u_{\uparrow}^- u_{\downarrow}^- d_{\uparrow}^-$	$\Phi_6(x_i) = [V_6 - A_6](x_i)$

Tabelle 6.2: Acht unabhängige Nukleon DAs [63].

Kombinationen der DAs gebildet.

6.4 Zusammenfassung des Kapitels

Es wurden Nukleon Distributionsamplituden vorgestellt. Grundsätzlich sind DAs als Fouriertransformierte der Wellenfunktion im Limes von $b \rightarrow 0$ definiert. Um Divergenzen abzuschneiden wurde ein Cutoff und damit eine Skala μ eingeführt. DAs sind somit skalenabhängig. Trilokale Matrixelemente konnten mit Hilfe einer Lichtkegelkinematik $z^2 = 0$ in 24 DAs und korrespondierenden Lorentzstrukturen entwickelt werden.

6.4. ZUSAMMENFASSUNG DES KAPITELS

Mit Hilfe von Spinprojektionen und aufgrund der Isospinrelationen sind insgesamt 8 Kombinationen von DAs gebildet worden, welche voneinander unabhängige DAs darstellen.

7

Pion-Nukleon Distributionsamplituden

In diesem Kapitel wollen wir die Pion-Nukleon DAs im Limes von $W = W_{th} = m_N + m_\pi$, also exakt auf der Threshold, herleiten. Um dies zu erreichen, benutzen wir das Soft-Pion Theorem, Stromalgebra und den Lichtkegelformalismus. Dabei wird die Lichtkegelexpansion (6.5), welche für ein einzelnes Spin 1/2 Nukleon im Anfangszustand gilt, auf ein $N\pi$ System ausgeweitet. In der Arbeit [57] ergab sich in Leading-Twist die Wellenfunktion zu

$$|p \uparrow\rangle = \frac{\phi_s(x)}{\sqrt{6}} |2u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow - u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle + \frac{\phi_a(x)}{\sqrt{2}} |u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle. \quad (7.1)$$

Durch Anwendung des Soft-Pion Theorems auf der Threshold haben wir [57]

$$\begin{aligned} |p \uparrow \pi^0\rangle &= \frac{\phi_s(x)}{2\sqrt{6}f_\pi} |6u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow + u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow + d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle - \frac{\phi_a(x)}{2\sqrt{2}f_\pi} |u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle, \\ |n \uparrow \pi^+\rangle &= \frac{\phi_s(x)}{\sqrt{12}f_\pi} |2u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow - 3u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow - 3d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle - \frac{\phi_a(x)}{2f_\pi} |u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Dabei gibt $\phi_s(x)$ bzw. $\phi_a(x)$ die symmetrische bzw. antisymmetrische DA in Twist-3 an. Die \uparrow und \downarrow stehen für die Helizitäten der jeweiligen Quarks. Ziel ist es, (7.2) in einer Lichtkegelexpansion in vollkommener Analogie zu (6.13) zu schreiben und dabei gleichzeitig den Formalismus auf alle höheren Twist-Ordnungen auszudehnen.

7.1 Pion-Nukleon DAs in Twist-3

Prinzipiell konzentrieren wir uns auf ein Objekt der Form

$$\langle 0 | O_{\alpha\beta\gamma}^{uud} | N(P, \lambda) \pi(k) \rangle, \quad (7.3)$$

wobei der trilokale Lichtkegeloperator $O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}$ mit

$$O_{\alpha\beta\gamma}^{uud} = \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 z) u_\beta^j(a_2 z) d_\gamma^k(a_3 z) \quad (7.4)$$

definiert und damit identisch zum Operator in u.a. (6.5) ist. π^+ bezeichnet das Pion im Anfangszustand mit Impuls k . Ziel wird es nun sein, (7.3) auf dem Lichtkegel zu berechnen.

Für $W = m_N + m_\pi$ verbleibt einzig die S-Welle des Soft-Pion Theorems, die Bremsstrahlungsanteile fallen identisch weg. Wir definieren in führendem Twist-3

$$\begin{aligned} 4 \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 z) u_\beta^j(a_2 z) d_\gamma^k(a_3 z) | p(P, \lambda) \pi^0 \rangle_{\text{tw-3}} &= \\ &= (\gamma_5)_{\gamma\delta} \frac{-i}{f_\pi} \left[V_1^{p\pi^0}(v_1)_{\alpha\beta,\delta} + A_1^{p\pi^0}(a_1)_{\alpha\beta,\delta} + T_1^{p\pi^0}(t_1)_{\alpha\beta,\delta} \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

und analog für $n\pi^+$:

$$\begin{aligned} 4 \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 z) u_\beta^j(a_2 z) d_\gamma^k(a_3 z) | n(P, \lambda) \pi^+ \rangle_{\text{tw-3}} &= \\ &= (\gamma_5)_{\gamma\delta} \frac{-i}{f_\pi} \left[V_1^{p\pi^+}(v_1)_{\alpha\beta,\delta} + A_1^{p\pi^+}(a_1)_{\alpha\beta,\delta} + T_1^{p\pi^+}(t_1)_{\alpha\beta,\delta} \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Das zusätzliche γ_5 sorgt für Paritätserhaltung. Analog zum Nukleonfall müssen natürlich die Amplituden $V^{N\pi}$ und $T^{N\pi}$ symmetrisch und $A^{N\pi}$ antisymmetrisch unter Vertauschung der ersten beiden Argumente sein.

Mit Hilfe der Standarddefinitionen

$$\begin{aligned} |\pi^+(k)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\pi^1(k)\rangle + |\pi^2(k)\rangle \right\}, \\ |\pi^-(k)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\pi^1(k)\rangle - |\pi^2(k)\rangle \right\}, \\ |\pi^0(k)\rangle &= |\pi^3(k)\rangle \end{aligned} \quad (7.7)$$

und unter Anwendung des Soft-Pion Theorems exakt auf der Threshold erhalten wir andererseits durch explizite Rechnung

$$\begin{aligned} \langle 0 | O_{\alpha\beta\gamma}^{uud} | n(P, \lambda) \pi^+(k) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \langle 0 | O_{\alpha\beta\gamma}^{uud} | n(P, \lambda) \pi^1(k) \rangle + i \langle 0 | O_{\alpha\beta\gamma}^{uud} | n(P, \lambda) \pi^2(k) \rangle \right\} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2} f_\pi} \left\{ \langle 0 | [Q_5^1, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}] | n(P, \lambda) \rangle + i \langle 0 | [Q_5^2, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}] | n(P, \lambda) \rangle \right\} + \dots, \\ \langle 0 | O_{\alpha\beta\gamma}^{uud} | p(P, \lambda) \pi^0(k) \rangle &= -\frac{i}{f_\pi} \langle 0 | [Q_5^3, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}] | p(P, \lambda) \rangle. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Die beiden Kommutatoren $[Q_5^1, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}(y)]$ und $[Q_5^3, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}(y)]$ induzieren eine chirale Rotation. Mit Hilfe von

$$[Q_5^a, q_f] = -\left(\frac{\tau^a}{2}\right)_{ff'} \gamma_5 q_{f'} \quad (7.9)$$

und unter Verwendung der Kettenregel $[A, BCD] = [A, B]CD + B[A, C]D + BC[A, D]$ erhält man:

$$\begin{aligned} [Q_5^1, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}] &= -\frac{1}{2} \left\{ (\gamma_5)_{\alpha\lambda} O_{\lambda\gamma\beta}^{ddu} + (\gamma_5)_{\beta\lambda} O_{\lambda\gamma\alpha}^{ddu} + (\gamma_5)_{\gamma\lambda} O_{\alpha\beta\lambda}^{uuu} \right\}, \\ [Q_5^2, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}] &= \frac{i}{2} \left\{ (\gamma_5)_{\alpha\lambda} O_{\lambda\gamma\beta}^{ddu} + (\gamma_5)_{\beta\lambda} O_{\lambda\gamma\alpha}^{ddu} - (\gamma_5)_{\gamma\lambda} O_{\alpha\beta\lambda}^{uuu} \right\}, \\ [Q_5^3, O_{\alpha\beta\gamma}^{uud}] &= -\frac{1}{2} \left\{ (\gamma_5)_{\alpha\lambda} O_{\lambda\beta\gamma}^{uud} + (\gamma_5)_{\beta\lambda} O_{\alpha\lambda\gamma}^{uud} - (\gamma_5)_{\gamma\lambda} O_{\alpha\beta\lambda}^{uud} \right\}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

7.2. HÖHERE TWISTS

Mit Hilfe der Expansion (6.5), unter Verwendung geeigneter Fierztransformationen (in der Form (6.19)) und bei Beachtung der Symmetrien, erhalten wir durch Vergleich von (7.5) bzw. (7.6) mit dem expliziten Ergebnis (7.8) die DAs

$$\begin{aligned} A_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} V_1^n(1, 3, 2) - \frac{1}{2} V_1^n(2, 3, 1) - \frac{1}{2} A_1^n(2, 3, 1) + \frac{1}{2} A_1^n(1, 3, 2) + T_1^n(2, 3, 1) - T_1^n(1, 3, 2) \right\}, \\ V_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} V_1^n(1, 3, 2) + \frac{1}{2} A_1^n(1, 3, 2) + T_1^n(1, 3, 2) + \frac{1}{2} V_1^n(2, 3, 1) + \frac{1}{2} A_1^n(2, 3, 1) + T_1^n(2, 3, 1) \right\}, \\ T_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ A_1^n(2, 3, 1) + A_1^n(1, 3, 2) - V_1^n(2, 3, 1) - V_1^n(1, 3, 2) \right\} \end{aligned} \quad (7.11)$$

und

$$\begin{aligned} V_1^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2} V_1^p(1, 2, 3), \\ A_1^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2} A_1^p(1, 2, 3), \\ T_1^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= \frac{3}{2} T_1^p(1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Unter Verwendung der Isospinrelation (6.22) kann (7.11) noch zu

$$\begin{aligned} V_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ V_1^n(1, 3, 2) + V_1^n(1, 2, 3) + V_1^n(2, 3, 1) + A_1^n(1, 3, 2) + A_1^n(2, 3, 1) \right\}, \\ A_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ V_1^n(3, 2, 1) - V_1^n(1, 3, 2) + A_1^n(2, 1, 3) + A_1^n(2, 3, 1) + A_1^n(3, 1, 2) \right\}, \\ T_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ A_1^n(2, 3, 1) + A_1^n(1, 3, 2) - V_1^n(2, 3, 1) - V_1^n(1, 3, 2) \right\} \end{aligned} \quad (7.13)$$

umgeschrieben und vereinfacht werden. Besonders sei darauf hingewiesen, dass die Relationen (7.12) und (7.13) nicht mehr die Isospinrelation (6.22) selbst erfüllen, da sich im $N\pi$ System Beiträge von Isospin 1/2 mit denen von 3/2 vermischen. Deshalb kann das Pion-Nukleon Paar sowohl Isospin 1/2 als auch 3/2 haben. Für die x^2 -Korrekturen definieren wir, wiederum analog zum Nukleonfall:

$$\begin{aligned} 4 \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 x) u_\beta^j(a_2 x) d_\gamma^k(a_3 x) | N\pi \rangle &= (\gamma_5)_{\gamma\delta} \frac{-i}{f_\pi} \left\{ \left[V_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{V}_1^M \right] (v_1)_{\alpha\beta,\delta} \right. \\ &\quad + \left[A_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{A}_1^M \right] (a_1)_{\alpha\beta,\delta} \\ &\quad \left. + \left[T_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{T}_1^M \right] (t_1)_{\alpha\beta,\delta} \right\}^{\pi N} + \dots \end{aligned} \quad (7.14)$$

Die Ergebnisse zu den x^2 -Korrekturen sowie eine kurze Herleitung seien im Anhang E.4 aufgeführt.

7.2 Höhere Twists

In Analogie zum Leading-Twist definieren wir für die höheren Twists:

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 z) u_\beta^j(a_2 z) d_\gamma^k(a_3 z) | N(P, \lambda) \pi(k) \rangle = \\
& = (\gamma_5)_{\gamma\delta} \frac{-i}{f_\pi} \left[S_1^{\pi N}(s_1)_{\alpha\beta,\delta} + S_2^{\pi N}(s_2)_{\alpha\beta,\delta} + P_1^{\pi N}(p_1)_{\alpha\beta,\delta} + P_2^{\pi N}(p_2)_{\alpha\beta,\delta} \right. \\
& \quad + V_1^{\pi N}(v_1)_{\alpha\beta,\delta} + V_2^{\pi N}(v_2)_{\alpha\beta,\delta} + \frac{1}{2} V_3^{\pi N}(v_3)_{\alpha\beta,\delta} + \frac{1}{2} V_4^{\pi N}(v_4)_{\alpha\beta,\delta} \\
& \quad + V_5^{\pi N}(v_5)_{\alpha\beta,\delta} + V_6^{\pi N}(v_6)_{\alpha\beta,\delta} + A_1^{\pi N}(a_1)_{\alpha\beta,\delta} + A_2^{\pi N}(a_2)_{\alpha\beta,\delta} \\
& \quad + \frac{1}{2} A_3^{\pi N}(a_3)_{\alpha\beta,\delta} + \frac{1}{2} A_4^{\pi N}(a_4)_{\alpha\beta,\delta} + A_5^{\pi N}(a_5)_{\alpha\beta,\delta} + A_6^{\pi N}(a_6)_{\alpha\beta,\delta} \\
& \quad + T_1^{\pi N}(t_1)_{\alpha\beta,\delta} + T_2^{\pi N}(t_2)_{\alpha\beta,\delta} + T_3^{\pi N}(t_3)_{\alpha\beta,\delta} + T_4^{\pi N}(t_4)_{\alpha\beta,\delta} \\
& \quad \left. + T_5^{\pi N}(t_5)_{\alpha\beta,\delta} + T_6^{\pi N}(t_6)_{\alpha\beta,\delta} + \frac{1}{2} T_7^{\pi N}(t_7)_{\alpha\beta,\delta} + \frac{1}{2} T_8^{\pi N}(t_8)_{\alpha\beta,\delta} \right]. \quad (7.15)
\end{aligned}$$

Im Prinzip ist die Berechnung völlig analog zu der im Twist-3. Allerdings ist der Aufwand um ein vielfaches höher als in führender Ordnung, da die anzuwendenden Fierztransformationen sehr viel komplexer sind. Aufgrund der Länge der Resultate der DAs zu den höheren Twist werden die Resultate in diesem Abschnitt nicht aufgeführt. Es sei an dieser Stelle auf den Anhang E verwiesen.

7.3 Zusammenfassung des Kapitels

Wir haben $N\pi$ DAs durch Kombinationen von Nukleon DAs ausgedrückt. Dies haben wir erreicht, indem wir zum einen eine Lichtkegelexpansion des trilokalen Matrixelementes mit $N\pi$ im Anfangszustand definierten. Andererseits konnten wir das Matrixelement mit Hilfe des Soft-Pion Theorems für $W = W_{th} = m_N + m_\pi$ explizit berechnen. Durch Vergleich der beiden Ergebnisse war es möglich, die $N\pi$ DAs zu extrahieren. Allerdings mischen sich in den Ergebnissen die Isospin 1/2 mit den 3/2 Anteilen, sodass die entsprechende Isospinrelation nicht mehr gültig ist. In Analogie zum Nukleonfall wurden zudem Twist-4 x^2 -Korrekturen vorgestellt.

8

LCSR zu den Nukleon Formfaktoren

In diesem Kapitel kommen wir zu der Methodik der Lichtkegelsummenregeln (LCSR). LCSR haben sich in der Vergangenheit stark etabliert und die Ergebnisse sind vielversprechend. Eine Vielzahl von Arbeiten zu diesem Thema wurden in den letzten Jahren veröffentlicht. Ganz besonders intensiv wurden dabei u.a. der Zerfall von B-Mesonen oder andere exklusive Streuprozesse betrachtet. Das Ziel von LCSR ist dabei stets physikalische Größen, welche charakteristisch für das betrachtete Objekt sind, unter Verwendung einer Lichtkegelkinematik zu berechnen. Oftmals werden innerhalb des Formalismus Formfaktoren, Zerfallskonstanten oder damit verbundene Größen berechnet. Im Prinzip repräsentieren LCSR den Versuch, die Lücke zwischen perturbativem und nicht-perturbativem Sektor zu schließen, indem die Sprache der *Dispersionsrelationen* angewandt wird. Grundsätzlich bestehen die LCSR aus den DAs, welche den direkten Input für die Rechnung schaffen. DAs wiederum bestehen aus nicht-perturbativen Parametern. Das übergeordnete Ziel des Formalismus ist es genau jene Parameter zu bestimmen und damit die jeweilige Wellenfunktion des Objekts. Das grundsätzliche Prinzip dabei ist, dass der ausgehende Zustand, innerhalb einer passend gewählten Korrelationsfunktion, stets durch ein ihn interpolierendes Feld ersetzt wird. In den letzten Jahren sind die LCSR mit großem Erfolg auf Dreiquark Zustände ausgeweitet worden. So wurden z.B. in den Arbeiten [1, 62, 65] Nukleon Formfaktoren für verschiedene interpolierende Felder errechnet.

Im Folgenden werden kurz die üblichsten Ströme vorgestellt. Im Anschluss daran konzentrieren wir uns stets auf das Nukleon interpolierende Ioffe-Feld, da es uns die mit großem Abstand besten Übereinstimmungen mit dem Experiment liefert. Die LCSR für die Nukleon Formfaktoren F_1 und F_2 werden vorgestellt. Anschließend werden die numerischen Ergebnisse unter Verwendung des Ioffe-Feldes präsentiert. Die eigentlichen Messgrößen, welche aus der Berechnung extrahiert werden können, sind u.a. die in der Vergangenheit vielfach untersuchten Nukleon Formfaktoren. Im Breitensystem sind G_M und G_E nichts anderes als die Fouriertransformation der Ladungs- und der Magnetisierungsdichte.

8.1 Eine kurze Einführung

Um einen physikalischen Streuprozess abstrakt beschreiben zu können müssen wir zu Anfang ein Objekt wählen, welches alle nötigen Informationen zum Streuprozess und den physikalischen Randbedingungen enthält. Betrachten wir die elastische Elektron-Proton Streuung, so besteht eine mögliche Wahl der Korre-

lationsfunktion in

$$T_{\nu}^{\pi N}(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta_p(0) j_{\nu}^{\text{em}}(x) \} | N(P) \pi(k) \rangle, \quad (8.1)$$

wobei η_p das Proton interpolierende Feld ist. Objekte der Art (8.1) werden seit Jahren im Rahmen der LCSR-Methodik verwendet. Ganz besonders ist dabei die Arbeit [64] hervorzustellen. Darin wurde die Idee vorgestellt, dem auslaufenden Zustand durch ein ihn interpolierendes Feld zu ersetzen. Als Konsequenz entstehen innerhalb der Rechnung, im Falle eines auslaufenden Nukleons, Dreiquark-Matrixelemente, welche dann auf dem Lichtkegel expandiert werden können.

Das übergeordnete Ziel der LCSR ist die Bestimmung der Nukleonwellenfunktion. Idealerweise möchte man natürlich ein Nukleon interpolierendes Feld, welches das Nukleon exakt beschreibt. In der Realität ist dies jedoch natürlich nicht möglich. Man muss sich mit Näherungen begnügen. In der Vergangenheit wurden unterschiedliche Ströme vorgeschlagen und in die Berechnungen miteinbezogen. Die gängigsten Felder seien hier kurz vorgestellt:

- Der CZ-Strom:
Grundsätzlich kann er mit

$$\eta_{CZ}(x) = \varepsilon^{ijk} [u^i(x) C \not{z} u^j(x)] \gamma_5 \not{z} d^k(x),$$

$$\langle 0 | \eta_p(0) | N(P) \rangle = f_N m_N N(P) \quad (8.2)$$

geschrieben werden. Bei der Betrachtung der Isospinsymmetrie fällt auf, dass der CZ-Strom keine definierte Symmetrie besitzt. Das heißt, der Isospinoperator der auf das Feld wirkt, generiert keinen reinen Isospinwert des Feldes. Vielmehr ist η_{CZ} zum einen natürlich durch große Beiträge der Art Isospin 1/2 gekennzeichnet, jedoch besitzt er zum anderen 3/2 Beiträge welche das physikalische Nukleon nicht wiedergeben. Der Strom verletzt also die Isospinsymmetrie. Ein Vergleich der theoretischen Vorhersagen aus [62] führte zudem zu keiner besonders guten Übereinstimmung mit dem Experiment, was nicht verwundern dürfte.

In den nächsten Zeilen sei kurz die Art der Berechnung von (8.1) skizziert. Zu Beginn formen wir eine Dispersionsrelation, indem wir einen vollständigen Einheitsoperator in (8.1) einfügen. Wir haben dann

$$z^{\nu} T_{\nu}(P, q) = \frac{f_N}{m^2 - P'^2} P' \left\{ \not{z} F_1(Q^2) + \left(\frac{\not{z} \not{q} - \not{q} \not{z}}{4m_N} \right) \right\} N(P), \quad (8.3)$$

wobei f_N die Kopplung des Stromes an das Nukleon ist. Offensichtlich ist (8.3) nun durch die beiden Formfaktoren F_1 und F_2 parametrisiert. Unter Beachtung von

$$P' \not{z} = \not{P} \not{z} - \not{q} \not{z} = \not{P} \not{z} - 2(qz) + \not{z} \not{q} = 2(Pz) - \not{z} \not{P} - 2(qz) + \not{z} \not{q} \quad (8.4)$$

zusammen mit

$$q \cdot z = 0, \quad P \cdot z = p \cdot z, \\ P' \not{z} \not{q} - P' \not{q} \not{z} = -P' \not{q} \not{z} + 2P'(zq) - P' \not{q} \not{z} = -2P' \not{q} \not{z} \quad (8.5)$$

haben wir unter Verwendung des Projektors Λ^+

$$\Lambda^+(P) z^{\nu} T_{\nu}(P, q) = \frac{f_N}{m^2 - P'^2} \left[2\Lambda^+(pz) F_1(Q^2) - \frac{1}{2m_N} \Lambda^+(P' \not{q} \not{z}) F_2(Q^2) \right] N(P). \quad (8.6)$$

Durch Ausschreiben von

$$\Lambda^+(\mathcal{P}' \not{q} \not{z}) = \Lambda^+(\mathcal{P} \not{q} \not{z}) - \Lambda^+(\not{q} \not{q} \not{z}) = \Lambda^+(\mathcal{P} \not{q} \not{z}) \quad (8.7)$$

und mit

$$\Lambda^+(\mathcal{P} \not{q} \not{z}) = -2(p \cdot z) \not{q}_\perp \quad (8.8)$$

folgt als Endergebnis

$$\Lambda^+(P) z^\nu T_\nu(P, q) = f_N \frac{(pz)}{m^2 - P'^2} \mathcal{P}' \left\{ 2F_1(Q^2) + \not{q}_\perp \frac{1}{M} F_2(Q^2) \right\} N^+(P). \quad (8.9)$$

Auf der anderen Seite ist es möglich (8.1) mit Hilfe der Lichtkegelexpansion zu beschreiben. In führender Ordnung erhält man: [62]

$$z^\nu T_\nu(P, q) \propto i \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i(q+k)x} \frac{kz}{k^2} \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_i^\alpha(a_1x) u_j^\beta(a_2x) \bar{d}_k^\gamma(a_3x) | P \rangle C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (8.10)$$

Die Koeffizienten $C_{\alpha\beta\gamma}$ stehen für die Vorfaktoren in der Lichtkegelexpansion der trilokalen Matrixelemente, siehe Kapitel 6. Im Weiteren kann (8.10) mit Hilfe der 24 invarianten DAs auf dem Lichtkegel expandiert werden. Nach Kontraktion von (8.10) mit Λ^+ definieren wir

$$\Lambda^+ z^\nu T_\nu(P, q) = + \frac{i}{f_\pi} (pz) \{ m_N \mathcal{A} + \not{q}_\perp \mathcal{B} \} N^+(P). \quad (8.11)$$

Aus einem Vergleich der Ergebnisse von (8.3) mit denen von (8.11) können wir die Summenregeln für die beiden Formfaktoren extrahieren. Auf die Angabe der expliziten Ergebnisse sei an dieser Stelle verzichtet, da sie keine wirklichen zusätzlichen Informationen enthalten. Sie können in [62] nachgelesen werden. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Berechnungsmethodik für alle Felder und Ströme im Grundsatz absolut identisch ist.

- Das verbesserte Nukleon interpolierende Feld:

Da der CZ-Strom kein reines Isospin 1/2 darstellt, wurden in [65] Beiträge zum Strom hinzuaddiert, welche die störenden 3/2 Beiträge kompensieren und das Feld η_{CZ} in ein reines Isospin 1/2 Feld η_I^p überführen.

Für das verbesserte interpolierende Feld schreiben wir [65]

$$\eta_I^p(x) = \frac{2}{3} \epsilon^{ijk} ([u^i(x) C \not{z} u^j(x)] \gamma_5 \not{z} d^k(x) - [u^i(x) C \not{z} d^j(x)] \gamma_5 \not{z} u^k(x)). \quad (8.12)$$

Dabei bildet nun (8.12) einen wirklichen Eigenzustand zum Isospinoperator ab. Die Ergebnisse für diesen Strom sind erheblich näher an den experimentellen Daten und geben bereits eine gute Näherung des physikalischen Nukleons wieder.

- Der Ioffe Strom:

Ein weiterer traditioneller Strom stellt der Ioffe Strom mit

$$\begin{aligned} \eta_p(x) &= \epsilon^{ijk} [u^i(x) C \gamma_\mu u^j(x)] \gamma_5 \gamma^\mu d^k(x), \\ \langle 0 | \eta_p(0) | N(P) \rangle &= \lambda_1^p m_N N(P) \end{aligned} \quad (8.13)$$

dar [66], λ_1^p ist die entsprechende Kopplung. Auch er ist kein klassischer Isospin 1/2 Strom und ebenso, wie der CZ-Strom, mit 3/2 Beiträgen verunreinigt. Ein Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit

den experimentellen Werten zu den Formfaktoren zeigt jedoch eine **beeindruckende Übereinstimmung**. Dies ist keineswegs aus den bereits genannten Gründen offensichtlich. Eine Erklärung könnte darin liegen, dass sich ungewollte und störende 3/2 Beiträge in den Summenregeln gegenseitig unterdrücken oder subtrahieren. Auch bei Betrachtung des expliziten Ergebnisses ist die offensichtliche Übereinstimmung mit dem Experiment nicht auf Anhieb ersichtlich.

Um ein Beispiel für die Berechnung der LCSR zu geben, konzentrieren wir uns auf den e_d -Anteil in der Korrelationsfunktion (8.1). Grundsätzlich beginnen wir mit

$$\begin{aligned} z_\mu T_{(d)}^\mu &= ie_d \varepsilon^{abc} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ [u^a(0) C \gamma_\lambda u^b(0)] \gamma_5 \gamma^\lambda d^c(0) \overline{d}(x) \not{x} d(x) \} | N(P) \rangle \\ &= ie_d \frac{i}{2\pi^2} \varepsilon^{abc} \int d^4x e^{iqx} \frac{1}{x^4} \langle 0 | (u^a(0) C \gamma_\lambda u^b(0)) \gamma^\lambda \not{x} \not{\gamma}_5 d^c(x) | N(P) \rangle, \end{aligned} \quad (8.14)$$

wobei der Quarkpropagator im Ortsraum definiert ist mit

$$\overline{d(0)} d(x) = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\not{x}}{x^4}. \quad (8.15)$$

Unter Benutzung von

$$\begin{aligned} -\varepsilon^{abc} \langle 0 | (u^a(0) C \gamma_\lambda u^b(0)) d^c(x) | N(P) \rangle &= \mathcal{V}_1 P_\lambda \gamma_5 N + \mathcal{V}_2 m_N P_\lambda \not{x} \gamma_5 N + \mathcal{V}_3 m_N \gamma_\lambda \gamma_5 N + \mathcal{V}_4 m_N^2 x_\lambda \gamma_5 N \\ &\quad + \mathcal{V}_5 m_N^2 i \sigma^{\mu\nu} x_\nu \gamma_5 N + \mathcal{V}_6 m_N^3 x_\lambda \not{x} \gamma_5 N, \end{aligned} \quad (8.16)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \int \mathcal{D}x_i e^{-iPxx_3} V_1(x_i), \\ \mathcal{V}_2 &= \frac{1}{2Px} \int \mathcal{D}x_i e^{-iPxx_3} [V_1 - V_2 - V_3](x_i) = \frac{i}{2} \int_0^1 dx_3 e^{-iPxx_3} [\widetilde{V}_1 - \widetilde{V}_2 - \widetilde{V}_3](x_3), \\ \mathcal{V}_3 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx_3 e^{-iPxx_3} \int_0^{\overline{x}_3} dx_1 V_3(x_1, 1 - x_1 - x_3, x_3), \\ \mathcal{V}_4 &= \frac{i}{4} \int_0^1 dx_3 e^{-iPxx_3} [-2\widetilde{V}_1 + \widetilde{V}_3 + \widetilde{V}_4 + 2\widetilde{V}_5](x_3), \\ \mathcal{V}_5 &= \frac{i}{4} \int_0^1 dx_3 e^{-iPxx_3} [\widetilde{V}_4 - \widetilde{V}_3](x_3), \\ \mathcal{V}_6 &= -\frac{1}{4} \int_0^1 dx_3 e^{-iPxx_3} [-\widetilde{\widetilde{V}}_1 + \widetilde{\widetilde{V}}_2 + \widetilde{\widetilde{V}}_3 + \widetilde{\widetilde{V}}_4 + \widetilde{\widetilde{V}}_5 - \widetilde{\widetilde{V}}_6](x_3) \end{aligned} \quad (8.17)$$

und mit Hilfe der einfachen Substitution

$$\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1 + \frac{x^2 m_N^2}{4} \mathcal{V}_1^M \quad (8.18)$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} z_\mu T_{(d)}^\mu &= \frac{e_d}{2\pi^2} \int_0^1 dx_3 \int d^4x \frac{e^{iqx - iPxx_3}}{x^4} \gamma^\lambda \not{x} \not{\gamma}_5 \left\{ P_\lambda \int_0^{\overline{x}_3} dx_1 V_1(x_i) + P_\lambda \frac{x^2 m_N^2}{4} V_1^M(x) \right. \\ &\quad \left. + P_\lambda m_N \not{x} \frac{i}{2} [\widetilde{V}_1 - \widetilde{V}_2 - \widetilde{V}_3](x_3) + m_N \gamma_\lambda \frac{1}{2} \int_0^{\overline{x}_3} dx_1 V_3(x_i) + m_N^2 x_\lambda \frac{i}{4} [-2\widetilde{V}_1 + \widetilde{V}_3 + \widetilde{V}_4 + 2\widetilde{V}_5](x_3) \right\} \end{aligned}$$

$$+m_N^2 i \sigma^{\lambda\nu} x_\nu [\widetilde{V}_4 - \widetilde{V}_3](x_3) - \frac{1}{4} m_N^3 x_\lambda \not{x} [-\widetilde{V}_1 + \widetilde{V}_2 + \widetilde{V}_3 + \widetilde{V}_4 + \widetilde{V}_5 - \widetilde{V}_6](x_3) \Big\} \gamma_5 N(P). \quad (8.19)$$

Die Integrale über den Ortsraum ergeben sich unter Verwendung der Definition $q' = q - x_3 P$ zu:

$$\begin{aligned} \int d^4 e^{iq'x} \frac{x_\alpha}{x^4} &= 2\pi^2 \frac{q'_\alpha}{q'^2}, \\ \int d^4 e^{iq'x} \frac{x_\alpha x_\beta}{x^4} &= 2\pi^2 i \frac{1}{q'^4} [2q'_\alpha q'_\beta - g_{\alpha\beta} q'^2], \\ \int d^4 e^{iq'x} \frac{x_\alpha x_\beta x_\nu}{x^4} &= 4\pi^2 \left\{ \frac{1}{q'^4} [g_{\alpha\beta} q'_\nu + g_{\alpha\nu} q'_\beta + g_{\beta\nu} q'_\alpha] \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{1}{q'^6} q_\alpha q_\beta q_\nu \right\}, \\ \int d^4 e^{iq'x} \frac{x_\alpha}{x^2} &= 8\pi^2 \frac{q'_\alpha}{q'^4}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Mit Hilfe von (8.20) erhält man für (8.19) nach Ausführung der Projektionen

$$\begin{aligned} \Lambda^+ [2 \not{P} \not{q}' \not{z} \not{q}' - q'^2 \not{P} \gamma_\alpha \not{z} \gamma^\alpha] N(P) &= -4x_3 P z [2Pq' + x_3 m_N^2 - m_N \not{q}_\perp] N^+, \\ \Lambda^+ \not{q}' N(P) &= [\not{q}_\perp - x_3 m_N] N^+ \end{aligned} \quad (8.21)$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned} \Lambda^+ z_\mu T_{(d)}^\mu &= -2(pz) e_d \int_0^1 dx_3 \left\{ \left[\frac{1}{q'^2} \int_0^{\bar{x}_3} dx_1 V_1(x_i) + \frac{m_N^2}{q'^4} V_1^{M(d)} \right] \not{q}_\perp \right. \\ &\quad + \frac{x_3 m_N}{q'^4} [\widetilde{V}_1 - \widetilde{V}_2 - \widetilde{V}_3] (2Pq' + x_3 m_N^2 - m_N \not{q}_\perp) \\ &\quad + \frac{x_3 m_N^2}{q'^4} [\widetilde{V}_4 - \widetilde{V}_3] [\not{q}_\perp - x_3 m_N] \\ &\quad \left. - \frac{x_3 m_N}{q'^2} \int_0^{\bar{x}_3} dx_1 V_3(x_i) \right\} N^+(P). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Schließlich kann die Beziehung

$$2x_3 q' P = -Q^2 - q'^2 - x_3^2 m_N^2 \quad (8.23)$$

in (8.22) eingesetzt werden, um das Endergebnis zu erhalten. Durch Vergleich von (8.11) mit (8.22) erhalten wir das Ergebnis zum d-Quark Anteil von \mathcal{A}^{em} und \mathcal{B}^{em} . Bei analoger Berechnung des u-Quark Anteils und nach Summation beider Beiträge ergibt sich [1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\text{em}} &= 2e_d \int_0^1 dx_3 \left\{ \frac{Q^2 + q_3^2}{q_3^4} \widetilde{V}_{123} + \frac{x_3}{q_3^2} \int_0^{\bar{x}_3} dx_1 V_3(x_i) + \frac{x_3^2 m_N^2}{q_3^4} \widetilde{V}_{43} \right\} \\ &\quad + 2e_u \int_0^1 dx_2 \left\{ \frac{x_2}{q_2^2} \int_0^{\bar{x}_2} dx_1 [-2V_1 + 3V_3 + A_3](x_i) - \frac{2x_2 m_N^2}{q_2^4} \mathcal{V}_1^{M(u)} + \frac{Q^2 - q_2^2}{q_2^4} \widetilde{V}_{123} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q^2 + q_2^2}{q_2^4} \widehat{A}_{123} - \frac{x_2^2 m_N^2}{q_2^4} [\widehat{V}_{1345} - 2\widehat{V}_{43} + \widehat{A}_{34}] - \frac{2x_2 m_N^2}{q_2^4} \widehat{V}_{123456} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}^{\text{em}} = & -2e_d \int_0^1 dx_3 \left\{ \frac{1}{q_3^2} \int_0^{\bar{x}_3} dx_1 V_1(x_i) + \frac{m_N^2}{q_3^4} \mathcal{V}_1^{M(d)} - \frac{x_3 m_N^2}{q_3^4} [\tilde{V}_{123} - \tilde{V}_{43}] \right\} \\
 & + 2e_u \int_0^1 dx_2 \left\{ \frac{1}{q_2^2} \int_0^{\bar{x}_2} dx_1 [V_1 + A_1](x_i) + \frac{m_N^2}{q_2^4} [\mathcal{V}_1^{M(u)} + \mathcal{A}_1^{M(u)}] \right. \\
 & \left. + \frac{x_2 m_N^2}{q_2^4} [\hat{V}_{1345} + \hat{V}_{123} + \hat{A}_{123} - 2\hat{V}_{43} + \hat{A}_{34}] \right\}, \tag{8.24}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(x_3) &= \int_1^{x_3} dx'_3 \int_0^{1-x'_3} dx_1 F(x_1, 1-x_1-x'_3, x'_3), \\
 \tilde{\tilde{F}}(x_3) &= \int_1^{x_3} dx'_3 \int_1^{x'_3} dx''_3 \\
 &\quad \times \int_0^{1-x''_3} dx_1 F(x_1, 1-x_1-x''_3, x''_3) \tag{8.25}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(x_2) &= \int_1^{x_2} dx'_2 \int_0^{1-x'_2} dx_1 F(x_1, x'_2, 1-x_1-x'_2), \\
 \hat{\hat{F}}(x_2) &= \int_1^{x_2} dx'_2 \int_1^{x'_2} dx''_2 \\
 &\quad \times \int_0^{1-x''_2} dx_1 F(x_1, x''_2, 1-x_1-x''_2) \tag{8.26}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 V_{43} &= V_4 - V_3, \\
 V_{123} &= V_1 - V_2 - V_3, \\
 V_{1345} &= -2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5, \\
 V_{12345} &= 2V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_5, \\
 V_{123456} &= -V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 - V_6, \tag{8.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{34} &= A_3 - A_4, \\
 A_{123} &= -A_1 + A_2 - A_3, \\
 A_{1345} &= -2A_1 - A_3 - A_4 + 2A_5, \\
 A_{12345} &= 2A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5, \\
 A_{123456} &= A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6 \tag{8.28}
 \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} T_{137} &= T_1 - T_3 - T_7, \\ T_{13478} &= 2T_1 - T_3 - T_4 - T_7 - T_8, \\ T_{134678} &= T_1 - T_3 - T_4 + T_6 - T_7 - T_8. \end{aligned} \quad (8.29)$$

8.2 LCSR zu F_1 und F_2 für den Ioffe Strom

Die Ergebnisse (8.24) enthalten Kontinuumsbeiträge. Um diese zu unterdrücken führen wir eine Transformation ein, welche die potenzierte Energieabhängigkeit, also Terme $\propto 1/q^n$, in eine exponentielle Energieabhängigkeit überführt. Zu diesem Zweck definieren wir einen neuen Hilfsparameter: Die Borelmasse.

Für alle Betrachtungen beschränken wir uns auf Masseregionen unterhalb der Roperresonanz von $s \approx 1.5 \text{ GeV}^2$, um nur die Grundzustandsenergie des Nukleons zu betrachten. Allgemein ist die Boreltransformation in b definiert mit

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_b \left[\frac{1}{a-b} \right] &= \frac{1}{b} \frac{1}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\frac{1}{b} \right)^{n+1} \\ &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\frac{1}{M^2} \right) \frac{1}{n!} = e^{-(a/M^2)}, \end{aligned} \quad (8.30)$$

dabei ist M die Borelmasse und a, b beliebige Hilfsvariablen. Allgemein gilt dann

$$\mathbb{B}_b \left[\frac{1}{(a-b)^n} \right] \rightarrow \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{M^2} \right)^{n-1} e^{-(a/M^2)}. \quad (8.31)$$

Speziell ergibt sich für Terme der Art

$$\mathbb{B}_{P'^2} \left[\frac{1}{s - P'^2} \right] = e^{-s/M^2}. \quad (8.32)$$

Die einzelnen Boreltransformation angewandt auf (8.24) ergeben dann

$$\begin{aligned} \int dx \frac{\varrho(x)}{(q-xP)^2} &= - \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{\varrho(x)}{(s-P'^2)} \rightarrow - \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x} \varrho(x) \exp \left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} - \frac{\bar{x}m_N^2}{M^2} \right), \\ \int dx \frac{\varrho(x)}{(q-xP)^4} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \frac{\varrho(x)}{(s-P'^2)^2} \rightarrow \frac{1}{M^2} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^2} \varrho(x) \exp \left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} - \frac{\bar{x}m_N^2}{M^2} \right) + \frac{\varrho(x_0) e^{-s_0/M^2}}{Q^2 + x_0^2 m_N^2}, \\ \int dx \frac{\varrho(x)}{(q-xP)^6} &= - \int_0^1 \frac{dx}{x^3} \frac{\varrho(x)}{(s-P'^2)^3} \rightarrow - \frac{1}{2M^4} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^3} \varrho(x) \exp \left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} - \frac{\bar{x}m_N^2}{M^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\varrho(x_0) e^{-s_0/M^2}}{x_0 (Q^2 + x_0^2 m_N^2) M^2} + \frac{1}{2} \frac{x_0^2}{Q^2 + x_0^2 m_N^2} \left[\frac{d}{dx_0} \frac{\varrho(x_0)}{x_0 (Q^2 + x_0^2 m_N^2)} \right] e^{-s_0/M^2}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

$s = \frac{1-x}{x} Q^2 + (1-x)m_N^2$ und x_0 ist die Lösung der quadratischen Gleichung in $s = s_0$:

$$x_0 = \left[\sqrt{(Q^2 + s_0 - m_N^2)^2 + 4m_N^2 Q^2} - (Q^2 + s_0 - m_N^2) \right] / (2m_N^2). \quad (8.34)$$

Damit ergeben sich letztendlich die LCSR für die einzelnen Formfaktoren [1]:

$$F_1^{\text{em}}(Q^2) = \frac{1}{2\lambda_1} \left[\int_{x_0}^1 dx \left(-\frac{\varrho_2^a(x)}{x} + \frac{\varrho_4^a(x)}{x^2 M^2} \right) \exp \left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} + \frac{xm_N^2}{M^2} \right) + \frac{\varrho_4^a(x_0) e^{-(s_0-m_N^2)/M^2}}{Q^2 + x_0^2 m_N^2} \right],$$

$$F_2^{\text{em}}(Q^2) = \frac{1}{\lambda_1} \left[\int_{x_0}^1 dx \left(-\frac{\varrho_2^b(x)}{x} + \frac{\varrho_4^b(x)}{x^2 M^2} \right) \exp \left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} + \frac{xm_N^2}{M^2} \right) + \frac{\varrho_4^b(x_0) e^{-(s_0-m_N^2)/M^2}}{Q^2 + x_0^2 m_N^2} \right], \quad (8.35)$$

$$(8.36)$$

mit

$$\varrho_2^a(x) = 2e_d \left\{ \tilde{V}_{123} + x \int_0^{\bar{x}} dx_1 V_3(x_i) + \right\} + 2e_u \left\{ x \int_0^{\bar{x}} dx_1 [-2V_1 + 3V_3 + A_3](x_i) - \hat{V}_{123} + \hat{A}_{123} \right\},$$

$$\varrho_4^a(x) = 2e_d \left\{ Q^2 \tilde{V}_{123} + x^2 m_N^2 \tilde{V}_{43} \right\} + 2e_u \left\{ Q^2 (\hat{V}_{123} + \hat{A}_{123}) - x^2 m_N^2 [\hat{V}_{1345} - 2\hat{V}_{43} + \hat{A}_{34}] \right.$$

$$\left. - 2xm_N^2 (\mathcal{V}_1^{M(u)} + \hat{\hat{V}}_{123456}) \right\},$$

$$\varrho_2^b(x) = -2e_d \left\{ \int_0^{\bar{x}} dx_1 V_1(x_i) \right\} + 2e_u \left\{ \int_0^{\bar{x}} dx_1 [V_1 + A_1](x_i) \right\},$$

$$\varrho_4^b(x) = -2e_d m_N^2 \left\{ \mathcal{V}_1^{M(d)} - x [\tilde{V}_{123} - \tilde{V}_{43}] \right\} + 2e_u m_N^2 \left\{ [\mathcal{V}_1^{M(u)} + \mathcal{A}_1^{M(u)}] \right.$$

$$\left. + x [\hat{V}_{1345} + \hat{V}_{123} + \hat{A}_{123} - 2\hat{V}_{43} + \hat{A}_{34}] \right\}. \quad (8.37)$$

Die Formfaktoren des Neutrons erhält man durch einfaches Ersetzen von $e_u \leftrightarrow e_d$.

8.3 Numerische Ergebnisse zu den Formfaktoren

In diesem Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse zu den Nukleon Formfaktoren aus [1, 67] vorgestellt. Wie bereits erwähnt, wollen wir uns von jetzt an allein auf den Ioffe Strom konzentrieren, da er uns die mit großem Abstand beste Übereinstimmung mit dem Experiment liefert. Die Nukleon DAs geben uns den benötigten Input für unsere Summenregeln. Im Gesamten existieren 6 nicht-perturbative Parameter aus denen die Nukleon DAs aufgebaut sind. Diese nicht-perturbativen Parameter sind bisher jedoch nur unzureichend bekannt. Deshalb existieren verschiedene Modelle für die einzelnen Parameter. Diese sind:

- Asymptotische Form: Bei der asymptotischen Wahl der Parameter wird stets nur der niedrigste konformale Spin mit in die Berechnungen einbezogen. Das heißt, Beiträge aufgrund von höheren Spin-zuständen werden nicht in Betracht gezogen. In der asymptotischen Form der Wellenfunktion hängen die Summenregeln einzig von dem Verhältnis aus Twist-4 und Twist-3 Matricelementen des Dreiquarkoperators in der niedrigsten Dimension ab. Bis zum jetzigen Zeitpunkt ist dieses Verhältnis bis zu einer Genauigkeit von ca. 20-30% durch QCD Summenregeln bekannt, siehe u.a. [1]
- CZ Modell: Die Parameter des CZ Modells unterscheiden sich signifikant von denen in der asymptotischen Form. Die nächst höhere Ordnung im konformalen Spin enthält eine ganze Reihe weiterer

8.4. ZUSAMMENFASSUNG DES KAPITELS

Parameter. Im CZ Modell der Wellenfunktion ist die Charakterisierung der Wellenfunktion sehr viel komplexer. In den Arbeiten [68, 69, 70] wurden jene Parameter bestimmt. Allerdings ist bis zum jetzigen Stand der Forschung die Genauigkeit der Parameter leider gering.

- BLW Form: Die Form ist als Mittelungsmodell zwischen der asymptotischen und der CZ Form zu verstehen. Die theoretischen Vorhersagen liegen stets zwischen diesen beiden Modellen. Wie obig bereits erwähnt, sind die nicht-perturbativen Parameter nur grob bekannt. Ein einfacher, freilich intuitiver, Weg ist es zwischen beiden Modellen zu mitteln. Die Ergebnisse der Summenregeln für die BLW Parameter haben dabei die besten mit dem Experiment übereinstimmenden Ergebnisse geliefert. Dies gab Grund zur Annahme, dass die optimale Wahl der Parameter nahe an der BLW Form liegt.

Eine Zusammenstellung der genauen Werte der nicht-perturbativen Parameter ist im Anhang verzeichnet. Die Ergebnisse unter Verwendung des Ioffe Stromes sind in Abb. 8.1, Abb. 8.2 und Abb. 8.3 zusammengestellt.

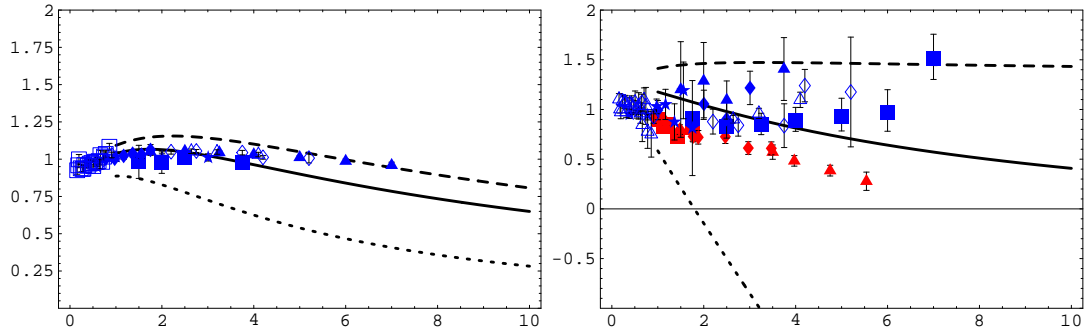


Abbildung 8.1: LCSR Ergebnisse für die elektromagnetischen Formfaktoren (Links: $G_M / (\mu_p G_{Dipole})$ vs. Q^2 ; Rechts: $\mu_p G_E / G_M$ vs. Q^2) des Protons [1, 67]. Die Kurven wurden mit Hilfe des BLW Modells (durchgezogene Linie), des asymptotischen Modells (gestrichelte Linie) und des CZ Modells (gestrichelte Linie) der Nukleon DAs errechnet. Die roten Datenpunkte wurden unter Verwendung der Polarisationstransfer-Methodik gemessen. Die blauen sind mit Hilfe einer Rosenbluth Separation erreicht worden. Für detailliertere Angaben zu den Punkten, siehe [1].

8.4 Zusammenfassung des Kapitels

Zu Beginn wurden die drei üblichsten interpolierenden Felder η des Nukleons vorgestellt. Anhand einer Korrelationsfunktion konnte, in unserem Beispiel, der elastische Streuvorgang beschrieben werden. Hauptziel in der Berechnung der Korrelationsfunktion ist die Extraktion der beiden Nukleon Formfaktoren F_1 und F_2 . Dies geschah einerseits durch Formung einer Dispersionsrelation und der damit einhergehenden Parametrisierung des Korrelators mit F_1 und F_2 . Andererseits konnte die Korrelationsfunktion mit Hilfe einer Lichtkegelexpansion explizit berechnet werden. Durch Vergleich beider Seiten konnten LCSR für die beiden Nukleon Formfaktoren aufgestellt werden. Ein Vergleich der theoretischen Vorhersagen mit den experimentellen Ergebnissen zeigte uns, dass Summenregeln für den Ioffe Strom die mit Abstand beste Übereinstimmung lieferten. Dies führte zu dem Entschluss, im Weiteren den Ioffe-Strom zu favorisieren. Im Anschluss daran wurden die numerischen LCSR Ergebnisse aus [1] vorgestellt.

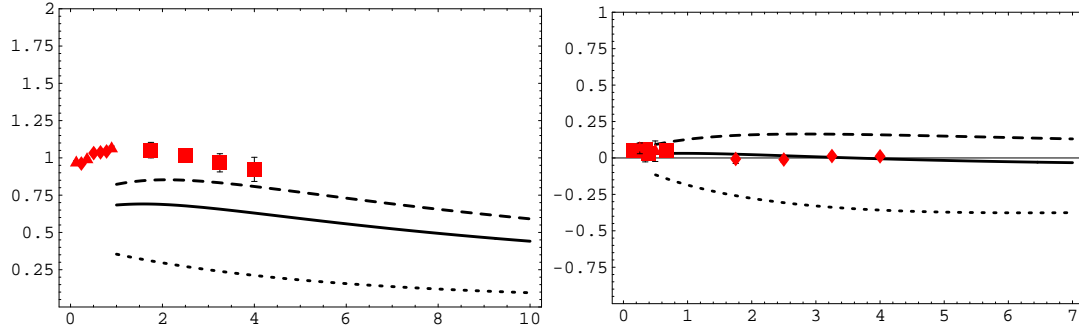


Abbildung 8.2: LCSR Ergebnisse für die elektromagnetischen Formfaktoren (Links: $G_M / (\mu_n G_{Dipole})$ gegen Q^2 ; Rechts: $\mu_n G_E / G_M$ vs. Q^2) des Neutrons [1, 67]. Die Kurven wurden mit Hilfe des BLW Modells (durchgezogene Linie), des asymptotischen Modells (gestreifte Linie) und des CZ Modells (gepunktete Linie) der Nukleon DAs errechnet. Die roten Datenpunkte wurden unter Verwendung der Polarisationsstransfer-Methodik gemessen. Die blauen sind mit Hilfe einer Rosenbluth Separation erreicht worden. Für detailliertere Angaben zu den Punkten, siehe [1].

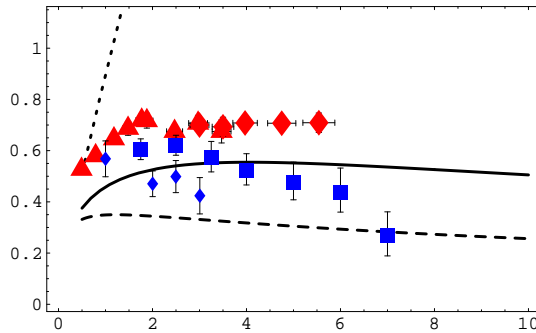


Abbildung 8.3: LCSR Ergebnisse (durchgezogene Linie) für das Verhältnis $\sqrt{Q^2} F_2^p / (F_1^p 1.79)$, siehe [67, 1]. Rote Symbole: Experimentelle Daten erhalten durch Polarisationsstransfer. Blaue Symbole: Experimentelle Daten erhalten durch eine Rosenbluth Separation. Für detailliertere Angaben zu den Punkten, siehe [1].

9

Ein Grundmodell für $G_1^{\pi N}(Q^2)$ und $G_2^{\pi N}(Q^2)$

Unter Verwendung des bereits eingeführten Soft-Pion Theorems wollen wir zwei unterschiedliche Energiebereiche in den Virtualitäten des Photons betrachten. Einerseits ist in niederenergetischen Bereichen die PEP mit Standardtechniken und Kommutatoralgebra beschreibbar. Andererseits werden wir erkennen, dass für moderate Energieüberträge diese Methodik nicht mehr richtig ist. Aufgrund dessen entwickeln wir in diesem Kapitel ein LCSR Modell, um den Prozess ebenso für moderate Energiebeträge im Bereich von $5 - 10 \text{ GeV}^2$ richtig beschreiben zu können.

Hauptziel in diesem Abschnitt ist die Berechnung zweier neuer Formfaktoren, die wir $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ nennen wollen. Sie beschreiben das Matrixelement des Übergangs $\gamma^* N \rightarrow N\pi$ für $W = m_N + m_\pi$ und wurden bereits in (3.13) eingeführt und vorgestellt.

9.1 Summenregeln im Soft-Pion Limit

Im Folgenden wollen wir ein Modell für die PEP entwickeln, welches ausschließlich für kleine Energien geeignet ist. Wie bereits erwähnt, ist für niederenergetische Bereiche von

$$Q^2 \ll \Lambda^3/m_\pi \quad (9.1)$$

das Soft-Pion Theorem in der klassischen Sichtweise anwendbar. Dabei ist Λ die hadronische Skala und es gilt $\Lambda \sim 1 \text{ GeV}$.

Betrachten wir nun konkret die beiden Produktionsprozesse

$$\begin{aligned} e(l) + p(P) &\rightarrow e(l') + \pi^+(k) + n(P'), \\ e(l) + p(P) &\rightarrow e(l') + \pi^0(k) + p(P'). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Eine mögliche Wahl der Korrelationsfunktion besteht in

$$T_\nu^{\pi N}(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta_p(0) j_\nu^{\text{em}}(x) \} | N(P) \pi(k) \rangle .$$

Hierbei betrachten wir das konjugiert komplexe Matricelement des Streuvorgangs, da wir uns dadurch die komplexe Konjugation der Matricelemente (7.5) und (7.6) vollständig sparen und den Rechenaufwand so minimieren können. Physikalisch gesehen besteht kein Unterschied, ob wir in der Korrelationsfunktion das Pion im einlaufenden oder im auslaufenden Zustand definieren.

Im niederenergetischen Grenzfall bei $|k| \rightarrow 0$ für festes q^2 und $(P')^2 = (P + k - q)^2$ kann die Korrelationsfunktion in (9.3) durch die in Abschnitt 3.3.1 benutzte PCAC Relation und mit Hilfe von Stromalgebra berechnet werden. Zusätzlich benutzen wir das Soft-Pion Theorem und induzieren so eine chirale Rotation, welche es uns ermöglicht, (9.3) ohne Pion darzustellen. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} T_\nu^{\pi N}(P, q) = & -\frac{i}{f_\pi} \left[i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ [Q_5^a, \eta_p(0)] j_\nu^{\text{em}}(x) \} | N(P) \rangle \right. \\ & \left. + i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta_p(0) [Q_5^a, j_\nu^{\text{em}}(x)] \} | N(P) \rangle \right] \\ & + \text{Bremsstrahlungsterme.} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Für die Kommutatoren ergeben sich nach kurzen Nebenrechnungen

$$\begin{aligned} [Q_5^+, j_\nu^{\text{em}}(x)] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} A_\nu(x), \quad A_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q} \gamma_\nu \gamma_5 \tau^+ q, \\ [Q_5^3, j_\nu^{\text{em}}(x)] &= 0, \end{aligned} \quad (9.4)$$

wobei $\tau^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau^1 \pm i\tau^2)$, $Q_5^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_5^1 \pm iQ_5^2)$ etc.. Also

$$\begin{aligned} [Q_5^+, \eta_p(x)] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_5 \eta_n(x), \\ [Q_5^3, \eta_p(x)] &= -\frac{1}{2} \gamma_5 \eta_p(x), \end{aligned} \quad (9.5)$$

wobei η_n der Neutron Strom mit

$$\eta_n(x) = -\varepsilon^{ijk} [d^i(x) C \gamma_\mu d^j(x)] \gamma_5 \gamma^\mu u^k(x) \quad (9.6)$$

ist. Auf der anderen Seite müssen wir eine Dispersionsrelation formen, welche alle Beiträge miteinbezieht. Gesucht sind Beiträge, die singular im Grenzfall $P'^2 \rightarrow m_N^2$ sind. Zum einen spielt der Pol-Beitrag eine wichtige Rolle. Er entspricht dem linken Diagramm in Abb. 9.1. Ein weiterer Beitrag entsteht, wenn das Pion am Nukleon, bildlich gesprochen, vorbeifliegt und hinter dem Schnitt mit dem Nukleon streut. In der Dispersionsrelation spricht man dann von einem semi-gebundenen (zu Englisch: semi-disconnected) Beitrag. Am Beispiel von π^+ ergibt sich unter Verwendung der wichtigen Definition (3.13) für (9.3) die Dispersionsrelation zu

$$\begin{aligned} T_\nu^{\pi^+ n}(P, q) = & \frac{i\lambda_1^p m_N}{f_\pi} \frac{m_N + P'}{m_N^2 - P'^2} \gamma_5 \left\{ (\gamma_\nu q^2 - q_\nu \not{q}) \frac{G_1^{n\pi^+}}{m_N^2} - \frac{i\sigma_{\nu\mu} q^\mu}{2m_N} G_2^{n\pi^+} \right\} N(P) \\ & - \frac{i\lambda_{n\pi^+} m_N}{f_\pi} \gamma_5 \frac{m_N + P' - \not{k}}{m_N^2 - (P' - k)^2} \left\{ \gamma_\nu F_1^n - \frac{i\sigma_{\nu\mu} q^\mu}{2m_N} F_2^n \right\} N(P) + \dots, \end{aligned} \quad (9.7)$$

wobei die \dots Beiträge höherer Wellen bezeichnen. F_1^n und F_2^n sind die Dirac und Pauli Formfaktoren des Neutrons.

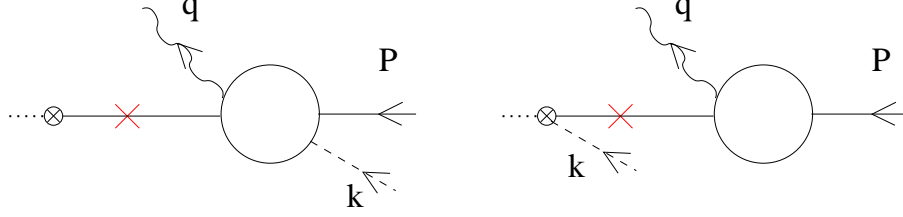


Abbildung 9.1: Schematische Struktur der Polterme in der Korrelationsfunktion (8.1)

Auf der anderen Seite kann (9.3) explizit unter Anwendung der Relationen (9.5) berechnet werden. Es entsteht

$$T_{\nu}^{\pi^+n}(P, q) = \frac{i\lambda_1^p m_N}{f_{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_N + P'}{m_N^2 - P'^2} \left\{ \gamma_{\nu} G_A(Q^2) - \frac{q_{\nu}}{2m_N} G_P(Q^2) - i \frac{\sigma_{\nu\mu} q^{\mu}}{2m_N} G_T(Q^2) \right\} \gamma_5 N(P) \\ + \frac{i}{\sqrt{2} f_{\pi}} \gamma_5 \lambda_1^n m_N \frac{m_N + P'}{m_N^2 - P'^2} \left\{ \gamma_{\nu} F_1^n - \frac{i\sigma_{\nu\mu} q^{\mu}}{2m_N} F_2^n \right\} N(P) + \dots \quad (9.8)$$

Die Formfaktoren G_A und G_P sind mit

$$\langle N(P') | A_{\nu}(0) | N(P) \rangle = \bar{N}(P') \left[\gamma_{\nu} G_A(Q^2) - \frac{q_{\nu}}{2m_N} G_P(Q^2) - i \frac{\sigma_{\nu\mu} q^{\mu}}{2m_N} G_T(Q^2) \right] \gamma_5 N(P) \quad (9.9)$$

definiert. Es muss gleichzeitig $G_T(Q^2) = 0$ aufgrund von CP- und Isospininvarianz gelten. Die in (10.4) auftauchende Kopplung $\lambda_{n\pi^+}$ errechnet sich zu

$$\lambda_{n\pi^+} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \lambda_1^p \quad (9.10)$$

und analog für π^0

$$\lambda_{p\pi^0} = \left(-\frac{1}{2} \right) \lambda_1^p. \quad (9.11)$$

Beide Seiten, also die Ergebnisse von (9.7) und (9.8), gleichgesetzt ergeben für die beiden Formfaktoren G_1 und G_2

$$Q^2 G_1^{n\pi^+}(Q^2) = \frac{m_N^2}{\sqrt{2}} G_A(Q^2) + \mathcal{O}(m_{\pi}/\Lambda, |k|/\Lambda), \\ G_2^{n\pi^+}(Q^2) = 0 + \mathcal{O}(m_{\pi}/\Lambda, |k|/\Lambda). \quad (9.12)$$

(9.12) stellt das *klassische* Ergebnis dar [20, 21, 35, 36]. Gemeint ist damit, dass sich im chiralen Limes $m_{\pi} \rightarrow 0$ die beiden Formfaktoren auf

$$\lim_{m_{\pi} \rightarrow 0} Q^2 G_1^{n\pi^+}(Q^2) = \frac{m_N^2}{\sqrt{2}} G_A(Q^2), \\ \lim_{m_{\pi} \rightarrow 0} G_2^{n\pi^+}(Q^2) = 0 \quad (9.13)$$

reduzieren. Analoge Betrachtungen gelten ebenso für die Emission eines π^0 . Unter Verwendung von (9.4) ergibt sich

$$T_{\nu}^{\pi^0 p}(P, q) \rightarrow \frac{i\lambda_1^p m_N}{2f_{\pi}} \frac{\gamma_5 (P - \not{q} + m_N)}{m_N^2 - P'^2} \left[\gamma_{\nu} F_1^p - \frac{i\sigma_{\nu\mu} q^{\mu}}{2m_N} F_2^p \right] N(P). \quad (9.14)$$

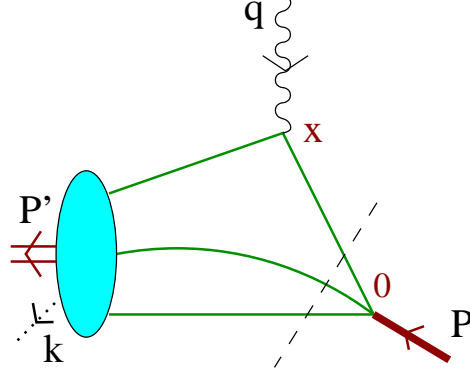


Abbildung 9.2: Schematische Struktur der LCSR für die PEp.

Die Nukleon Beiträge $\propto F_1, F_2$ kürzen sich mit den Nukleon Beiträgen in der Dispersionsrelation exakt heraus. Übrig bleiben lediglich Beiträge der Form

$$\begin{aligned} Q^2 G_1^{p\pi^0}(Q^2) &= 0 + \mathcal{O}(m_\pi/\Lambda, |k|/\Lambda), \\ G_2^{p\pi^0}(Q^2) &= 0 + \mathcal{O}(m_\pi/\Lambda, |k|/\Lambda). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Die gesamte Betrachtungsweise bricht jedoch für große Energieüberträge zusammen. Wir suchten Beiträge, welche singulär in $(P')^2 = m_N^2$ waren. Im semi-disconnected Beitrag steht jedoch im Nenner ein Term der Form $(P' - k)^2$. Für große k bewegt sich der Pol $(P' - k)^2 = m_N^2$ vom Nukleon Pol $(P')^2 = m_N^2$ weg. Wir können also unsere bisherige Herleitung für große k nicht mehr anwenden, da sie an Gültigkeit verliert. Eine hinreichende Bedingung ist dafür, wie eingangs im Kapitel erwähnt, $Q^2 \ll \Lambda^3/m_\pi$. Dies ist einfach zu erkennen, da wir fordern, dass $(P' - k)^2 - (P')^2 \ll \Lambda_{QCD}^2 \sim m_N^2$. Wir werden im Anschluss ein Modell entwickeln, welches im umgekehrten Fall, für große Energiebeträge $Q^2 \gg \Lambda^3/m_\pi$, richtig ist.

9.2 LCSR für $G_1^{\pi N}(Q^2)$ und $G_2^{\pi N}(Q^2)$

Wir haben gesehen, dass sich die Situation für große Energien signifikant ändert. Standardtechniken sind nicht mehr anwendbar, da die beiden Grenzwerte $Q \rightarrow \infty$ und $m_\pi \rightarrow 0$ nicht mehr miteinander kommutieren und so das Pion nicht gleichzeitig weich zum einlaufenden und auslaufenden Nukleon sein kann. Wir wollen uns ab jetzt darauf konzentrieren, dass das Pion ausschließlich zum auslaufenden Nukleon weich ist. Im Anschluss wird ein LCSR-basiertes Modell vorgestellt, welches gerade für $Q^2 \gg \Lambda^3/m_\pi$ oder für Q^2 von bis zu 10 GeV^2 valide ist.

Ausgangspunkt ist wiederum die Korrelationsfunktion

$$T_\nu^{\pi N}(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta_p(0) j_\nu^{\text{em}}(x) \} | N(P) \pi(k) \rangle$$

und per Definition legen wir fest, dass

$$\Lambda_+ T_\mu z^\mu = + \frac{i}{f_\pi} (pz + kz) \gamma_5 \{ m_N \mathcal{A}^{\pi N} + \not{q}_\perp \mathcal{B}^{\pi N} \} N^+(P). \quad (9.16)$$

Die invarianten Funktionen $\mathcal{A}^{\pi N}$ und $\mathcal{B}^{\pi N}$ sind, wie bei den Nukleon Formfaktoren, ganz analog über eine Lichtkegelexpansion mit Hilfe der Nukleon DAs berechenbar. Für P'^2 gilt wegen Impulserhaltung $P'^2 = (P + k - q)^2$. Für $\mathcal{A}^{\pi N}$ und $\mathcal{B}^{\pi N}$ erhält man nach einiger Rechnung

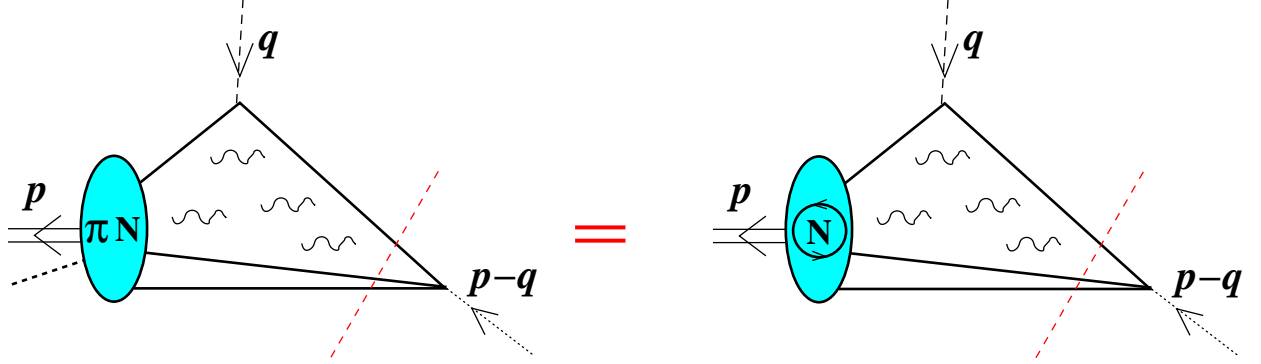


Abbildung 9.3: Darstellung der Summenregeln bei denen für $W_{th} = m_N + m_\pi$ nur der Term der chiralen Rotation bleibt.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{\pi N} = & 2e_d \int_0^1 dx_3 \left\{ \frac{Q^2 + q_3^2}{q_3^4} \tilde{V}_{123}^{\pi N} + \frac{x_3}{q_3^2} \int_0^{\bar{x}_3} dx_1 V_3^{\pi N}(x_i) + \frac{x_3^2 m_N^2}{q_3^4} \tilde{V}_{43}^{\pi N} \right\} \\
 & + 2e_u \int_0^1 dx_2 \left\{ \frac{x_2}{q_2^2} \int_0^{\bar{x}_2} dx_1 [-2V_1^{\pi N} + 3V_3^{\pi N} + A_3^{\pi N}](x_i) - \frac{2x_2 m_N^2}{q_2^4} \mathcal{V}_1^{\pi N, M(u)} + \frac{Q^2 - q_2^2}{q_2^4} \hat{V}_{123}^{\pi N} \right. \\
 & \left. + \frac{Q^2 + q_2^2}{q_2^4} \hat{A}_{123}^{\pi N} - \frac{x_2^2 m_N^2}{q_2^4} [\hat{V}_{1345}^{\pi N} - 2\hat{V}_{43}^{\pi N} + \hat{A}_{34}^{\pi N}] - \frac{2x_2 m_N^2}{q_2^4} \hat{V}_{123456}^{\pi N} \right\}, \\
 \mathcal{B}^{\pi N} = & -2e_d \int_0^1 dx_3 \left\{ \frac{1}{q_3^2} \int_0^{\bar{x}_3} dx_1 V_1^{\pi N}(x_i) + \frac{m_N^2}{q_3^4} \mathcal{V}_1^{\pi N, M(d)} - \frac{x_3 m_N^2}{q_3^4} [\tilde{V}_{123}^{\pi N} - \tilde{V}_{43}^{\pi N}] \right\} \\
 & + 2e_u \int_0^1 dx_2 \left\{ \frac{1}{q_2^2} \int_0^{\bar{x}_2} dx_1 [V_1 + A_1]^{\pi N}(x_i) + \frac{m_N^2}{q_2^4} [\mathcal{V}_1^{\pi N, M(u)} + \mathcal{A}_1^{\pi N, M(u)}] \right. \\
 & \left. + \frac{x_2 m_N^2}{q_2^4} [\hat{V}_{1345}^{\pi N} + \hat{V}_{123}^{\pi N} + \hat{A}_{123}^{\pi N} - 2\hat{V}_{43}^{\pi N} + \hat{A}_{34}^{\pi N}] \right\}. \tag{9.17}
 \end{aligned}$$

Dabei sei darauf hingewiesen, dass $\mathcal{A}^{\pi N}$ und $\mathcal{B}^{\pi N}$ exakt die gleiche Form wie im Falle der Nukleon Formfaktoren die Koeffizienten \mathcal{A} und \mathcal{B} haben. Dies ist nicht offensichtlich und ergibt sich erst nach rechnerischer Betrachtung. Die detaillierten Ausdrücke der x^2 -Korrekturen $\mathcal{V}_1^{\pi N, M(u,d)}$ und $\mathcal{A}_1^{\pi N, M(u,d)}$ sind im Anhang E aufgeführt. Um Beiträge höhere Resonanzen zu unterdrücken, muss das Ergebnis Borel-transformiert werden. Es ergibt sich dafür

$$\begin{aligned}
 \int dx \frac{\varrho(x)}{(q - x(P + k))^2} &= - \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{\varrho(x)}{(s - P'^2)} \rightarrow - \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x} \varrho(x) \exp\left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} - \frac{\bar{x}m_N^2}{M^2}\right), \tag{9.18} \\
 \int dx \frac{\varrho(x)}{(q - x(P + k))^4} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \frac{\varrho(x)}{(s - P'^2)^2} \rightarrow \frac{1}{M^2} \int_{x_0}^1 \frac{dx}{x^2} \varrho(x) \exp\left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} - \frac{\bar{x}m_N^2}{M^2}\right) + \frac{\varrho(x_0) e^{-s_0/M^2}}{Q^2 + x_0^2 m_N^2}.
 \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite haben wir für die Dispersionsrelation wiederum zwei Beiträge und erhalten

$$\mathcal{A}^{\pi N} = \frac{2\lambda_1^p(Q^2/m_N^2)G_1^{\pi N}}{m_N^2 - P'^2} + \frac{2\lambda_{\pi N}F_1(Q^2)}{m_N^2 - (P' - k)^2},$$

$$\mathcal{B}^{\pi N} = -\frac{\lambda_1^p G_2^{\pi N}}{m_N^2 - P'^2} + \frac{\lambda_{\pi N} F_2(Q^2)}{m_N^2 - (P' - k)^2}. \quad (9.19)$$

Um auch hier die Beiträge höherer Resonanzen zu unterdrücken, muss ebenso (9.7) transformiert werden. Für den Beitrag $\propto G_1, G_2$ ist die Transformation trivial. Wir haben lediglich

$$\frac{1}{m_N^2 - P'^2} \rightarrow e^{-m_N^2/M^2}. \quad (9.20)$$

In Bezug auf Beiträge $\propto F_1, F_2$ ist die Situation komplizierter, da wir stets eine Boreltransformation in der Variablen P'^2 benötigen. Die Terme $\propto F_1, F_2$ können jedoch umgeformt werden. Dazu betrachten wir zuerst, dass

$$P' = (1 + \delta)P - q \quad \text{mit} \quad k_\mu = \delta P_\mu \quad (9.21)$$

für weiche Pionen ist. Benutzen wir zusätzlich noch die nützlichen Skalarprodukte

$$2P'k = 2\delta P'P \quad (9.22)$$

und

$$q^2 = ((1 + \delta)P - P')^2 = -Q^2 = (1 + \delta)^2 m_N^2 - 2(1 + \delta)PP' + P'^2 \quad (9.23)$$

so führt dies zusammen mit

$$2(1 + \delta)PP' = (1 + \delta)^2 m_N^2 + P'^2 + Q^2 \quad (9.24)$$

auf

$$2P'k = \frac{\delta}{1 + \delta} \left[(1 + \delta)^2 m_N^2 + P'^2 + Q^2 \right]. \quad (9.25)$$

Beiträge der Form $\propto 1/(m_N^2 - (P' - k)^2)$ verhalten sich nun unter Anwendung einer Boreltransformation wie

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_N^2 - (P' - k)^2} &= \frac{1}{m_N^2 - P'^2 - \delta^2 m_N^2 + 2P'k} \\ &= \frac{1}{m_N^2 - P'^2 - \delta^2 m_N^2 + \frac{\delta}{1 + \delta} \left[(1 + \delta)^2 m_N^2 + P'^2 + Q^2 \right]} \\ &= \frac{1 + \delta}{(1 + \delta)m_N^2 - (1 + \delta)P'^2 - (1 + \delta)\delta^2 m_N^2 + \delta(1 + \delta)^2 m_N^2 + \delta P'^2 + \delta Q^2} \\ &=: (1 + \delta) \frac{1}{A - P'^2}, \end{aligned} \quad (9.26)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= (1 + \delta)m_N^2 - (1 + \delta)\delta^2 m_N^2 + \delta(1 + \delta)^2 m_N^2 + \delta Q^2 \\ &= (1 + \delta)^2 + m_N^2. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Als Endergebnis ergibt sich als Boreltransformierte der semi-disconnected Beiträge

$$\frac{1}{m_N^2 - (P' - k)^2} \rightarrow (1 + \delta) e^{-[m_N^2(1 + \delta)^2 + \delta Q^2]/M^2}. \quad (9.28)$$

Bei einem Vergleich von (9.20) mit (9.28) wird deutlich, dass Beiträge der semi-disconnected contribution im Gegensatz zum Pol Term um einen zusätzlichen Faktor $\exp\{\delta[m_N^2(2+\delta) + Q^2]/M^2\}$ im Exponenten unterdrückt sind. Für Unterdrückungen der Ordnung $\exp\{-[s_0 - m_N^2]/M^2\}$ erhält man eine Bedingung, ab der Terme $\propto 1/(m_N^2 - (P' - k)^2)$ zum Kontinuum gezählt werden können.

$$\delta[m_N^2(2+\delta) + Q^2] \geq s_0 - m_N^2, \quad (9.29)$$

oder

$$Q^2 \geq (s_0 - m_N^2)/\delta - (2+\delta)m_N^2, \quad (9.30)$$

mithin $Q^2 \geq 7.3 \text{ GeV}^2$. Für kleinere Q^2 Werte müssen die Beiträge allerdings mit in die Rechnung einbezogen werden. Letztendlich ergeben sich die Summenregeln für G_1 und G_2 **ohne** die Beiträge der semi-disconnected Beiträge (zweiter Term in (9.7)) zu

$$\begin{aligned} Q^2 G_1^{\pi N}(Q^2) &= \frac{m_N^2}{2\lambda_1^p} \left[\int_{x_0}^1 dx \left(-\frac{\varrho_2^a(x)}{x} + \frac{\varrho_4^a(x)}{x^2 M^2} \right) \exp\left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} + \frac{xm_N^2}{M^2}\right) + \frac{\varrho_4^a(x_0) e^{-(s_0-m_N^2)/M^2}}{Q^2 + x_0^2 m_N^2} \right], \\ G_2^{\pi N}(Q^2) &= -\frac{1}{\lambda_1^p} \left[\int_{x_0}^1 dx \left(-\frac{\varrho_2^b(x)}{x} + \frac{\varrho_4^b(x)}{x^2 M^2} \right) \exp\left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} + \frac{xm_N^2}{M^2}\right) + \frac{\varrho_4^b(x_0) e^{-(s_0-m_N^2)/M^2}}{Q^2 + x_0^2 m_N^2} \right], \end{aligned} \quad (9.31)$$

wobei die Funktionen $\varrho_{2,4}^{a,b}(x)$ durch Pion-Nukleon DAs in Form

$$\begin{aligned} \varrho_2^a(x) &= 2e_d \left\{ \tilde{V}_{123}^{\pi N} + x \int_0^{\bar{x}} dx_1 V_3^{\pi N}(x_i) \right\} + 2e_u \left\{ x \int_0^{\bar{x}} dx_1 [-2V_1 + 3V_3 + A_3]^{\pi N}(x_i) - \hat{V}_{123}^{\pi N} + \hat{A}_{123}^{\pi N} \right\}, \\ \varrho_4^a(x) &= 2e_d \left\{ Q^2 \tilde{V}_{123}^{\pi N} + x^2 m_N^2 \tilde{V}_{43}^{\pi N} \right\} + 2e_u \left\{ Q^2 \left(\hat{V}_{123}^{\pi N} + \hat{A}_{123}^{\pi N} \right) - x^2 m_N^2 \left[\hat{V}_{1345}^{\pi N} - 2\hat{V}_{43}^{\pi N} + \hat{A}_{34}^{\pi N} \right] \right. \\ &\quad \left. - 2xm_N^2 \left(\mathcal{V}_1^{\pi N, M(u)} + \hat{\hat{V}}_{123456}^{\pi N} \right) \right\}, \\ \varrho_2^b(x) &= -2e_d \left\{ \int_0^{\bar{x}} dx_1 V_1^{\pi N}(x_i) \right\} + 2e_u \left\{ \int_0^{\bar{x}} dx_1 [V_1 + A_1]^{\pi N}(x_i) \right\}, \\ \varrho_4^b(x) &= -2e_d m_N^2 \left\{ \mathcal{V}_1^{\pi N, M(d)} - x \left[\tilde{V}_{123} - \tilde{V}_{43} \right]^{\pi N} \right\} + 2e_u m_N^2 \left\{ \left[\mathcal{V}_1^{\pi N, M(u)} + \mathcal{A}_1^{\pi N, M(u)} \right] \right. \\ &\quad \left. + x \left[\hat{V}_{1345} + \hat{V}_{123} + \hat{A}_{123} - 2\hat{V}_{43} + \hat{A}_{34} \right]^{\pi N} \right\} \end{aligned} \quad (9.32)$$

ausgedrückt werden.

Da im nächsten Abschnitt zur Darstellung der numerischen Ergebnisse die Summenregeln zum axialen Formfaktor G_A benötigt werden, seien sie an dieser Stelle angegeben [1]:

$$G_A(Q^2) = \frac{1}{\lambda_1^p} \left[\int_{x_0}^1 dx \left(-\frac{\varrho_2^c(x)}{x} + \frac{\varrho_4^c(x)}{x^2 M^2} \right) \exp\left(-\frac{\bar{x}Q^2}{xM^2} + \frac{xm_N^2}{M^2}\right) + \frac{\varrho_4^c(x_0) e^{-(s_0-m_N^2)/M^2}}{Q^2 + x_0^2 m_N^2} \right], \quad (9.33)$$

mit

$$\begin{aligned}\varrho_2^c(x) &= \left\{ \tilde{V}_{123} + x \int_0^{\bar{x}} dx_1 V_3(x_i) \right\} + \left\{ x \int_0^{\bar{x}} dx_1 [2A_1 + 3A_3 + V_3](x_i) - \hat{A}_{123} + \hat{V}_{123} \right\}, \\ \varrho_4^c(x) &= \left\{ Q^2 \tilde{V}_{123} + x^2 m_N^2 \tilde{V}_{43} \right\} + \left\{ Q^2 (\hat{A}_{123} + \hat{V}_{123}) + x^2 m_N^2 [\hat{A}_{1345} - 2\hat{A}_{34} + \hat{V}_{43}] \right. \\ &\quad \left. + 2xm_N^2 (\mathcal{A}_1^{M(u)} - \hat{\hat{A}}_{123456}) \right\}.\end{aligned}\quad (9.34)$$

9.3 Numerische Ergebnisse zum Grundmodell

Um Ungenauigkeiten wegen der Wahl des Borelparameters zu vermeiden, werden die Summenregeln zu den Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_1^{\pi N}$ durch den axialen Formfaktor G_A aus (9.33) dividiert. Es seien folgende Größen definiert

$$N_1^{\pi N} = \sqrt{2}Q^2 G_1^{\pi N} / (G_A m_N^2) \quad (9.35)$$

und

$$N_2^{\pi N} = \sqrt{2}G_2^{\pi N} / G_A. \quad (9.36)$$

Wegen (9.12) und (9.15) ergibt das Verhältnis $N_1^{\pi N}$ für kleine Energien gerade 1. Dies entspricht gerade dem Standardmodell für kleine Virtualitäten des Photons. Ganz besonders auffällig ist, dass $N_1^{\pi N}$ sowohl für π^+

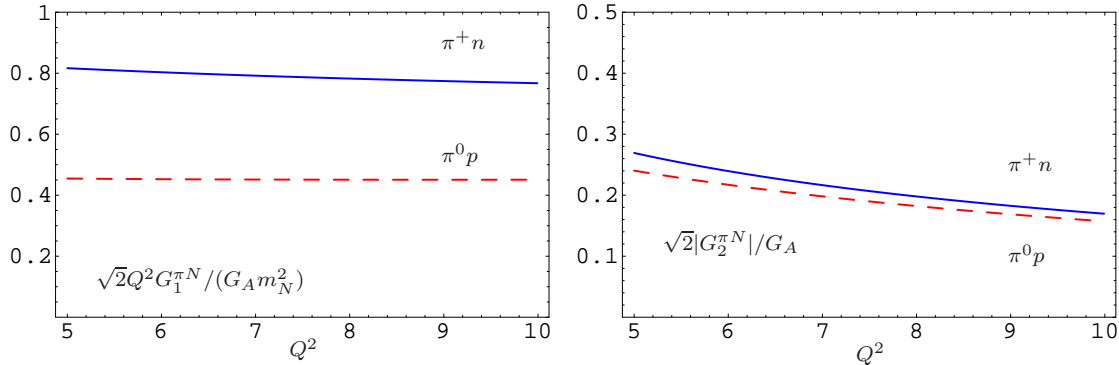


Abbildung 9.4: PEP Amplituden auf der Threshold, (3.13) normalisiert auf den axialen Nukleon Formfaktor: $\pi^+ n$ (durchgezogene blaue Kurven) und $\pi^0 p$ (gestrichelte rote Kurven). Die Ergebnisse wurden unter Verwendung des BLW Modells [1] der Nukleon DAs erreicht.

als auch für π^0 konstant in Q^2 ist, was sehr interessant und gleichzeitig vor allem im Falle des π^+ überraschend ist. Obwohl die einzelnen $n\pi^+$ DAs eine recht komplexe Form besitzen, skaliert die Summenregel zu $G_1^{\pi N}$ mit dem axialen Formfaktor G_A aus (9.33). Für die einzelnen Zahlenwerte erhalten wir

$$\begin{aligned}N_1^{\pi^+ n} &= 0.80 \pm 0.10, \\ N_1^{\pi^0 p} &= 0.45 \pm 0.08,\end{aligned}\quad (9.37)$$

dabei beschreiben die Fehlerangaben \pm die Unterschiede in den Ergebnissen zu den Summenregeln unter Verwendung der BLW und der asymptotischen Parameter

Betrachten wir im Weiteren die Ergebnisse zu $N_2^{\pi N}$, so sind die Amplituden nicht klein, sondern ganz im Gegensatz zur niederenergetischen Standardlösung von erheblicher numerischer Bedeutung. Dies impliziert große Helizitätsflip-Beiträge durch $G_2^{\pi N}$. Des Weiteren fällt auf, dass beide Amplituden $N_2^{\pi^+ n}$ und $N_2^{\pi^0 p}$ beinahe die gleiche Größe besitzen. Sie können in der dipolartigen Form

$$N_2^{\pi N}(Q^2) = \frac{N_2^{\pi N}(Q_0^2)}{1 + b(Q^2 - Q_0^2)} \quad (9.38)$$

mit der Referenzskala $Q_0^2 = 7.5 \text{ GeV}^2$, dem Krümmungsparameter $b \simeq 0.1 \text{ GeV}^{-2}$ und den Werten

$$\begin{aligned} N_2^{\pi^+ n}(Q_0^2) &= 0.21 \pm 0.15, \\ N_2^{\pi^0 p}(Q_0^2) &= -0.19 \pm 0.07 \end{aligned} \quad (9.39)$$

parametrisiert werden.

9.4 Zusammenfassung des Kapitels

Im ersten Teil des Kapitel betrachteten wir niederenergetische Regime für $Q^2 \ll \Lambda^3/m_\pi$. In diesem Energiebereich war es möglich, mit Hilfe des Soft-Pion Theorems und Kommutatoralgebra die Korrelationsfunktion (9.3) zu berechnen. Für die beiden Formfaktoren konnte daraus im chiralen Limes $m_\pi \rightarrow 0$ das Standardresultat reproduziert werden.

Die Situation ändert sich grundlegend für den umgekehrten Energiebereich von $Q^2 \gg \Lambda^3/m_\pi$. Standardtechniken sind dabei nicht mehr anwendbar. Wir lösten das Problem, indem wir (9.3) mit Hilfe des LCSR Formalismus berechneten. Das Endresultat waren Summenregeln für die beiden Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$. Aufgrund der Dispersionsrelation (9.19) bestehen die Summenregeln aus einem Pol- und einem semi-disconnected Beitrag, siehe Abb. (9.1). Unter alleiniger Betrachtung des Pol-Terms wurden im letzten Teil die numerischen Ergebnisse zu den Formfaktoren bestimmt. Es wurde gezeigt, dass die Koeffizienten $N_1^{\pi^+ n}$ und $N_1^{\pi^0 p}$ konstant sind. Somit skaliert $Q^2 G_1^{\pi N}/m_N^2$ mit dem axialen Formfaktor G_A . Für die $N_2^{\pi N}(Q^2)$ ergab sich eine Übereinstimmung in der Amplitude für beide Kanäle. Außerdem zeigten sich große Helizitätsflip-Beiträge in $G_2^{\pi N}$.

10

Das Gesamtmodell für die Formfaktoren $G_i^{\pi N}$

In Kapitel 9 wurden zwei unterschiedliche Energiebereiche betrachtet. Für $Q^2 \ll \Lambda^3/m_\pi$ konnten wir zum einen die Korrelationsfunktion mit Hilfe von Standardtechniken, dem Soft-Pion Theorem und Stromalgebra berechnen. Daraus extrahierten wir anschließend LCSR für die beiden Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$. Im chiralen Limes reproduzierten wir das Standardresultat. Für den umgekehrten Grenzfall $Q^2 > \Lambda^3/m_\pi$ berechneten wir Summenregeln für die $G_i^{\pi N}$ mit Hilfe des Lichtkegelformalismus im Bereich von $5-10 \text{ GeV}^2$. Wir hatten also für zwei verschiedene Energiebereiche unterschiedliche Vorhersagen. Im Folgenden wird nun ein Modell entwickelt, welches für Virtualitäten von $1-10 \text{ GeV}^2$ valide ist und so zwischen nieder- und höherenergetischen Bereichen interpoliert.

10.1 Summenregeln für $G_1^{\pi^+ n}$ und $G_2^{\pi^0 p}$

Das LET ist ein niederenergetisches Modell, welches aus einer Expansion von Koeffizienten der Art m_π/m_N und $m_\pi Q^2/m_N$ aufgebaut ist. Für große Q^2 bricht dieses Modell allerdings zusammen und es wird ein Modell benötigt, welches von kleinen zu größeren Virtualitäten (einigen GeV^2) interpoliert. Bereits in Abschnitt 9.2 wurde ein Modell für mittlere Virtualitäten Q^2 vorgestellt. Allerdings wurden der Einfachheit halber noch nicht alle Beiträge zum Streuprozess miteinbezogen, um nicht den Fokus auf die grundsätzliche Idee zu verlieren. Tatsächlich brauchen wir nun einen Formalismus, welcher die Lücke zwischen der PEp von sehr kleinen GeV^2 hin zu einigen GeV^2 schließt.

Betrachten wir die physikalische Situation genauer. Für die Erweiterung des Modell benötigen wird die Energieabhängigkeit der Kopplung des Ioffe Stromes an den $N\pi$ Zustand. Bereits in (9.10) und (9.11) haben wir sie für $\vec{k} = 0$ des Pions berechnet. Für $\vec{k} \neq 0$ entsteht unter Anwendung des Soft-Pion Theorems ein weiterer Beitrag durch Emission eines Pions im Endzustand. Es ergibt sich:

$$\langle 0 | \eta_p(0) | p(P' - k) \pi^0(k) \rangle = \frac{i\lambda_1^p m_N}{2f_\pi} \left[1 - \frac{g_A}{P'^2 - m_N^2} (\not{P}' - \not{k} + m_N) \not{k} \right] \gamma_5 N_p(P' - k), \quad (10.1)$$

$$\langle 0 | \eta_p(0) | p(P' - k) \pi^+(k) \rangle = \frac{i\lambda_1^p m_N}{\sqrt{2}f_\pi} \left[1 - \frac{g_A}{P'^2 - m_N^2} (\not{P}' - \not{k} + m_N) \not{k} \right] \gamma_5 N_n(P' - k). \quad (10.2)$$

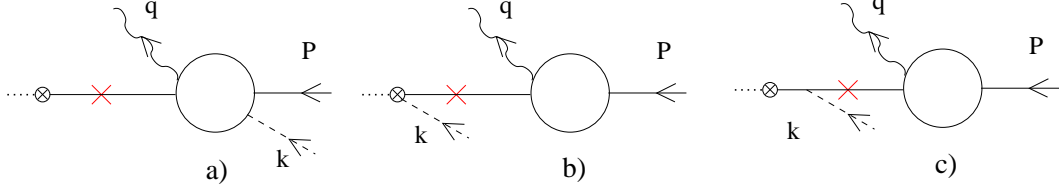


Abbildung 10.1: Bild a): Darstellung des Kontaktterms; im chiralen Limes $m_\pi \rightarrow 0$ und nahe der Threshold kann er mit Hilfe einer chiralen Rotation des Ioffe Stromes dargestellt werden. Bild b): Darstellung des semi-disconnected Terms; das Pion fliegt am Nukleon vorbei. Bild c): Darstellung des semi-disconnected Terms für die Emission eines Pions im Endzustand.

(10.3)

Alle drei Beiträge zusammen ergeben dann die Dispersionsrelation z.B. für π^0

$$\begin{aligned}
 T_\nu^{\pi^0 p}(P, q) = & \frac{i\lambda_1^p m_N}{f_\pi} \left\{ \frac{((1+\delta) \not{P} - \not{q} + m_N) \gamma_5}{m_N^2 - P'^2} \left[(\gamma_\nu q^2 - q_\nu \not{q}) \frac{G_1^{\pi^0 p}}{m_N^2} - \frac{i\sigma_{\nu\mu} q^\mu}{2m_N} G_2^{\pi^0 p} \right] \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{(1+\delta) \gamma_5 (\not{P} - \not{q} + m_N)}{[m_N^2(1+\delta)^2 + \delta Q^2] - P'^2} \left[\gamma_\nu F_1^p - \frac{i\sigma_{\nu\mu} q^\mu}{2m_N} F_2^p \right] \\
 & \left. - \frac{1}{2[Q^2 + m_N^2(2+\delta)]} \frac{(1+\delta) g_A (\not{P} - \not{q} + m_N) \gamma_5}{[m_N^2(1+\delta)^2 + \delta Q^2] - P'^2} \left[(\gamma_\nu q^2 - q_\nu \not{q}) G_M^p - \frac{i\sigma_{\nu\mu} q^\mu}{2m_N} 4m_N^2 G_E^p \right] \right\} N(P).
 \end{aligned}
 \tag{10.4}$$

Andererseits kann, wie bereits im Grundmodell gezeigt, $T_\nu^{\pi N}(P, q)$ mit Hilfe der LCSR auf Quarkniveau explizit berechnet werden. Beide Seiten gleichgesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{\pi^0 p} &= \frac{2\lambda_1^p}{m_N^2 - P'^2} \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 p}(Q^2) + \frac{\lambda_1^p}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[F_1^p(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^p(Q^2) \right], \\
 \mathcal{B}^{\pi^0 p} &= -\frac{\lambda_1^p}{m_N^2 - P'^2} G_2^{\pi^0 p}(Q^2) + \frac{\lambda_1^p}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[\frac{1}{2} F_2^p(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^p(Q^2) \right], \\
 \mathcal{A}^{\pi^+ n} &= \frac{2\lambda_1^p}{m_N^2 - P'^2} \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^+ n}(Q^2) + \frac{\sqrt{2}\lambda_1^p}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[F_1^n(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^n(Q^2) \right], \\
 \mathcal{B}^{\pi^+ n} &= -\frac{\lambda_1^p}{m_N^2 - P'^2} G_2^{\pi^+ n}(Q^2) + \frac{\sqrt{2}\lambda_1^p}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[\frac{1}{2} F_2^n(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^n(Q^2) \right].
 \end{aligned}
 \tag{10.5}$$

Aufgelöst nach $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ ergeben sich nach entsprechender Boreltransformation die Summenregeln

$$\begin{aligned}
 \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 p} &= \frac{e^{m_N^2/M^2}}{2\lambda_1^p} \mathbb{B}_{P'^2}[\mathcal{A}^{\pi^0 p}](M^2, Q^2) - \frac{1}{2} e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[F_1^p(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^p(Q^2) \right], \\
 G_2^{\pi^0 p} &= -\frac{e^{m_N^2/M^2}}{\lambda_1^p} \mathbb{B}_{P'^2}[\mathcal{B}^{\pi^0 p}](M^2, Q^2) + e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{2} F_2^p(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^p(Q^2) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^+ n} &= \frac{e^{m_N^2/M^2}}{2\lambda_1^p} \mathbb{B}_{P'^2}[\mathcal{A}^{\pi^+ n}](M^2, Q^2) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\delta(2m_N^2+Q^2)/M^2} \left[F_1^n(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^n(Q^2) \right], \\ G_2^{\pi^+ n} &= -\frac{e^{m_N^2/M^2}}{\lambda_1^p} \mathbb{B}_{P'^2}[\mathcal{B}^{\pi^+ n}](M^2, Q^2) + e^{-\delta(2m_N^2+Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} F_2^n(Q^2) + \frac{2\sqrt{2}g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^n(Q^2) \right]. \end{aligned} \quad (10.6)$$

In Abb. 10.2 ist das Verhältnis aus dem LCSR Resultat (10.6) und dem LET Standardresultat (3.46) für

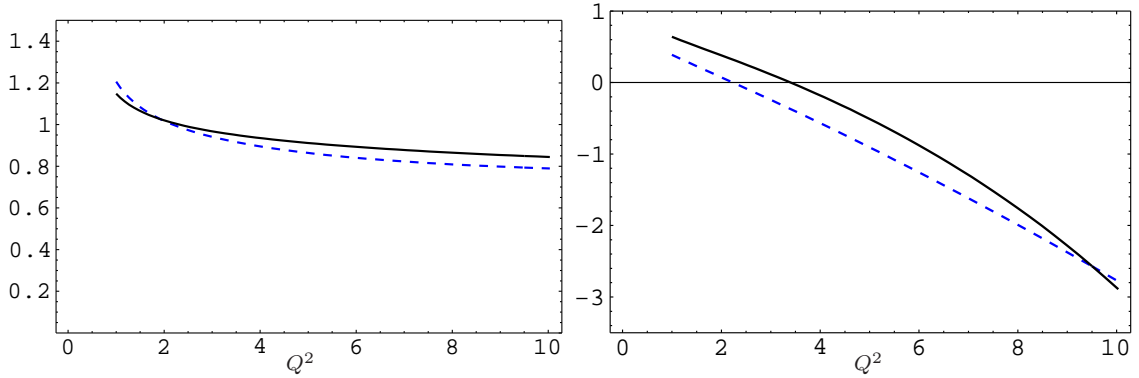


Abbildung 10.2: Die Verhältnisse der LCSR Vorhersagen der verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi^0 p}$ (linker Plot) und $G_2^{\pi^0 p}$ (rechter Plot) zu den entsprechenden Ergebnissen im Soft-Pion Limes (3.46). Die durchgezogene und die gestrichelte Linie korrespondieren zu der Berechnung mit den Borelparametern $M^2 = 2 \text{ GeV}^2$ und $M^2 = 1 \text{ GeV}^2$.

verschiedene Borelmassen dargestellt. Da Borelparameter eingeführt wurden um höhere Resonanzen, z.B. die des Roper, zu unterdrücken, müssen die Summenregeln möglichst unabhängig von ihnen sein. Borelparameter stellen also keine physikalischen Größen an sich dar, sondern sind vielmehr künstlich eingeführt worden, um das Ergebnis physikalisch sinnvoll erscheinen zu lassen und nur Grundzustandsenergien des Nukleons dabei mitzuzählen. Da die Kurven in Abb. 10.2 sich nur wenig voneinander unterscheiden und damit so gut wie unabhängig von der Borelmasse sind, erweisen sich die Resultate (10.6) als stabile und gute Summenregeln.

Der erste Term in (10.6) $\propto \frac{e^{m_N^2/M^2}}{2\lambda_1^p} \mathbb{B}_{P'^2}[\mathcal{A}, \mathcal{B}^{\pi N}]$ entspricht bis auf x^2 -Korrekturen dem Nukleon Formfaktor F_1 bzw. F_2 multipliziert mit einem konstanten Vorfaktor, also

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{P'^2}[\mathcal{A}^{\pi^0 p}](M^2, Q^2) &\propto \lambda_1^p e^{-m_N^2/M^2} F_1(Q^2), \\ \mathbb{B}_{P'^2}[\mathcal{B}^{\pi^0 p}](M^2, Q^2) &\propto \frac{1}{2} \lambda_1^p e^{-m_N^2/M^2} F_2(Q^2). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Entsprechendes gilt ebenso für $n\pi^+$.

Wir haben dann

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 p} &= R_1^{\pi^0 p} F_1^p(Q^2) - \frac{1}{2} e^{-\delta(2m_N^2+Q^2)/M^2} \left[F_1^p(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^p(Q^2) \right], \\ G_2^{\pi^0 p} &= R_2^{\pi^0 p} F_2^p(Q^2) + e^{-\delta(2m_N^2+Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{2} F_2^p(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^p(Q^2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{m_N^2}G_1^{\pi^+n} &= R_1^{\pi^+n}F_1^p(Q^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\delta(2m_N^2+Q^2)/M^2} \left[F_1^n(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^n(Q^2) \right], \\ R_2^{\pi^+n} &= R_2^{\pi^+n}F_2^p(Q^2) + e^{-\delta(2m_N^2+Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}F_2^n(Q^2) + \frac{2\sqrt{2}g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^n(Q^2) \right],\end{aligned}\quad (10.8)$$

mit den Verhältnissen $R_{1,2}^{\pi N}$

$$\begin{aligned}R_1^{\pi N} &= Q^2 G_1^{\pi N} / (m_N^2 F_1^p), \\ R_2^{\pi N} &= G_2^{\pi N} / F_2^p,\end{aligned}\quad (10.9)$$

wobei

$$\begin{aligned}R_1^{\pi^0 p} &= \frac{1}{2}, & R_2^{\pi^0 p} &= -0.61(-0.64), \\ R_1^{\pi^+ n} &= 0.88(0.68), & R_2^{\pi^+ n} &= 0.67(0.28).\end{aligned}\quad (10.10)$$

Die Zahlen in den Klammern entsprechen den Ergebnissen unter Verwendung der asymptotischen Parameter. Im Besonderen ergab sich für die $R_{1,2}^{\pi^0 p}$ ein Wert nicht weit von $1/2$, der wegen des Vorfaktors $1/2$ in den πN DAs entsteht und dabei eine sehr stabile Summenregel-Vorhersage darstellt. Eine Abweichung von diesem Wert ist den x^2 -Korrekturen geschuldet, welche von denen in den Formfaktoren $F_{1,2}$ abweichen. Speziell die starke Abhängigkeit der $R_1^{\pi^+ n}$ und $R_2^{\pi^+ n}$ von der Wahl der nicht-perturbativen Parameter ist augenfällig. Dies sollte allerdings nicht als Rückschlag der Methodik der LCSR aufgefasst werden. Vielmehr impliziert dies, dass die $R_{1,2}^{\pi^+ n}$ bezogen auf die Wahl der Nukleonwellenfunktion sehr sensitiv sind. Die Summenregeln für die G_i bestehen also wegen Abb. 10.1 aus drei Beiträgen. Einen ersten Aufgrund des Kontaktterms und die beiden weiteren sind semi-disconnected Beiträge, welche exponentiell in Q^2 unterdrückt sind. Entscheidend in den Ergebnissen ist, dass die Beiträge $\propto g_A$ in (10.8) die Ergebnisse des Referenzmodells (3.46) wiedergeben. Betrachten wir speziell $\pi^0 p$ für kleine Q^2 , so tendieren die ersten beiden Koeffizienten, Kontaktterm und der semi-disconnected Beitrag, dazu, sich gegenseitig zu kompensieren. Für kleine Q^2 wird entsprechend dann das Standard LET (3.46) bis auf Korrekturen in m_π reproduziert, obwohl das LET innerhalb eines anderen Modells für kleine Q^2 hergeleitet wurde. Dies ist eine Bestätigung, dass das Modell (3.46) auch über den direkten Anwendungsbereich des LET hinaus, hin zu größeren Q^2 von $m_\pi Q^2/m_N^3 \geq \mathcal{O}(1)$, noch Gültigkeit hat. Aus diesem Grund interpoliert (10.8) zwischen dem LET (3.46) und dem LCSR-basierten Grundmodell (9.31).

10.2 Summenregeln zu den $G_1^{\pi^- p}$ und $G_2^{\pi^0 n}$

Für $Q^2 \ll \Lambda^3/m_\pi$ und $m_\pi \rightarrow 0$ ergeben sich die LETs im Falle eines Neutrons als Target [21, 35, 36]:

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{m_N^2}G_1^{\pi^0 n} &= -\frac{g_A}{2} \frac{Q^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_M^n, \\ G_2^{\pi^0 n} &= -\frac{2g_A m_N^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_E^n, \\ \frac{Q^2}{m_N^2}G_1^{\pi^- p} &= \frac{g_A}{\sqrt{2}} \frac{Q^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_M^p - \frac{1}{\sqrt{2}} G_A, \\ G_2^{\pi^- p} &= \frac{2\sqrt{2}g_A m_N^2}{(Q^2 + 2m_N^2)} G_E^p.\end{aligned}\quad (10.11)$$

Unter Verwendung der Kopplungen

$$\begin{aligned}\langle 0 | \eta_n(0) | n(P' - k) \pi^0(k) \rangle &= \frac{-i\lambda_1^p m_N}{2f_\pi} \left[1 - \frac{g_A}{P'^2 - m_N^2} (\not{P}' - \not{k} + m_N) \not{k} \right] \gamma_5 N_n(P' - k), \\ \langle 0 | \eta_n(0) | n(P' - k) \pi^-(k) \rangle &= \frac{i\lambda_1^p m_N}{\sqrt{2}f_\pi} \left[1 - \frac{g_A}{P'^2 - m_N^2} (\not{P}' - \not{k} + m_N) \not{k} \right] \gamma_5 N_p(P' - k)\end{aligned}\quad (10.12)$$

und nach Durchführung aller Projektionen ergibt sich in analoger Weise für die Produktion von einem Neutron

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\pi^0 n} &= \frac{2\lambda_1^n}{m_N^2 - P'^2} \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 n}(Q^2) - \frac{\lambda_1^n}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[F_1^n(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^n(Q^2) \right], \\ \mathcal{B}^{\pi^0 n} &= \frac{\lambda_1^n}{m_N^2 - P'^2} G_2^{\pi^0 n}(Q^2) + \frac{\lambda_1^n}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[\frac{1}{2} F_2^n(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^n(Q^2) \right], \\ \mathcal{A}^{\pi^- p} &= \frac{2\lambda_1^n}{m_N^2 - P'^2} \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^- p}(Q^2) + \frac{\sqrt{2}\lambda_1^n}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[F_1^p(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^p(Q^2) \right], \\ \mathcal{B}^{\pi^- p} &= -\frac{\lambda_1^n}{m_N^2 - P'^2} G_2^{\pi^- p}(Q^2) + \frac{\sqrt{2}\lambda_1^n}{m_N^2 + \delta(2m_N^2 + Q^2) - P'^2} \left[\frac{1}{2} F_2^p(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^p(Q^2) \right].\end{aligned}\quad (10.13)$$

Nach Boreltransformation von (10.13) und Auflösung nach den Formfaktoren G_i erhalten wir die Summenregeln

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 n} &= \frac{e^{m_N^2/M^2}}{2\lambda_1^n} \mathbb{B}_{P'^2} [\mathcal{A}^{\pi^0 n}](M^2, Q^2) + \frac{1}{2} e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[F_1^n(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^n(Q^2) \right], \\ G_2^{\pi^0 n} &= \frac{e^{m_N^2/M^2}}{\lambda_1^n} \mathbb{B}_{P'^2} [\mathcal{B}^{\pi^0 n}](M^2, Q^2) - e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{2} F_2^n(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^n(Q^2) \right], \\ \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^- p} &= \frac{e^{m_N^2/M^2}}{2\lambda_1^n} \mathbb{B}_{P'^2} [\mathcal{A}^{\pi^- p}](M^2, Q^2) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[F_1^p(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^p(Q^2) \right], \\ G_2^{\pi^- p} &= -\frac{e^{m_N^2/M^2}}{\lambda_1^n} \mathbb{B}_{P'^2} [\mathcal{B}^{\pi^- p}](M^2, Q^2) + e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} F_2^p(Q^2) + \frac{2\sqrt{2}g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^p(Q^2) \right].\end{aligned}\quad (10.14)$$

Schließlich

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^0 n} &= R_1^{\pi^0 n} F_1^n(Q^2) + \frac{1}{2} e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[F_1^n(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^n(Q^2) \right], \\ G_2^{\pi^0 n} &= R_2^{\pi^0 n} F_2^n(Q^2) - e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{2} F_2^n(Q^2) + \frac{2g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^n(Q^2) \right], \\ \frac{Q^2}{m_N^2} G_1^{\pi^- p} &= R_1^{\pi^- p} F_1^n(Q^2) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[F_1^p(Q^2) - \frac{g_A Q^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_M^p(Q^2) \right], \\ G_2^{\pi^- p} &= R_2^{\pi^- p} F_2^n(Q^2) + e^{-\delta(2m_N^2 + Q^2)/M^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} F_2^p(Q^2) + \frac{2\sqrt{2}g_A m_N^2}{Q^2 + 2m_N^2} G_E^p(Q^2) \right],\end{aligned}\quad (10.15)$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} R_1^{\pi N} &= Q^2 G_1^{\pi N} / (m_N^2 F_1^n), \\ R_2^{\pi N} &= G_2^{\pi N} / F_2^n \end{aligned} \quad (10.16)$$

und den entsprechenden Koeffizienten

$$\begin{aligned} R_1^{\pi^0 n} &= -\frac{1}{2}, & R_2^{\pi^0 n} &= 0.58(0.57), \\ R_1^{\pi^- p} &= -1.37(-0.74), & R_2^{\pi^- p} &= 1.32(0.32). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Dabei ist zu beachten, dass (10.9) zum Proton Formfaktor $F_{1,2}^p$ normalisiert ist, wohingegen (10.16) mit $F_{1,2}^n$ skaliert. Wiederum ist leicht erkennbar, dass für kleine Q^2 sich die ersten beiden Terme kompensieren und dabei das LET Resultat (10.11) reproduziert wird

Damit haben wir konkrete Vorhersagen zu den Formfaktoren $G_1^{\pi^+ n}$, $G_1^{\pi^0 p}$, $G_2^{\pi^+ n}$ und $G_2^{\pi^0 p}$ für den gesamten Energiebereich von $1 \dots 10 \text{ GeV}^2$ geschaffen.

10.3 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurde ein LCSR basiertes Modell für die verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ vorgestellt, welches zwischen niederenergetischen Bereichen und Bereichen höherer Energien interpoliert. Ziel war es ein Modell zu entwickeln, welches sowohl für $Q^2 \ll \Lambda^3/m_\pi$ als auch für $Q^2 \gg \Lambda^3/m_\pi$ valide ist. Dazu führten wir eine Energieabhängigkeit der Kopplung des Ioffe Stromes η_I mit dem πN Zustand ein. In dieser Energieabhängigkeit wurde mit Hilfe des Soft-Pion Theorems ein weiterer semi-disconnected Betrag $\sim g_A$ miteinbezogen. Die Summenregeln wurden entsprechend den drei Diagrammen aus Abb. 10.1 berechnet. Besonders wichtig ist dabei herauszustellen, dass beispielsweise in den LCSR für $\pi^0 p$ im Falle kleiner Q^2 sich Beiträge in den $G_1^{\pi N}$ tendieren herauszukürzen und sich entsprechend bis auf Ordnungen in m_π das LET Resultat (3.46) reproduzieren lässt. Aufgrund dessen ist das Modell als Interpolationsmodell zwischen den beiden Energiebereichen zu verstehen. Die LCSR Kurven in Abb. 10.2 zeigen eine sehr geringe Abhängigkeit vom Borelparameter M , was darauf schließen lässt, dass die Summregeln stabil sind.

11

Numerische Resultate

In diesem Kapitel werden die vollständigen numerischen Ergebnisse der Arbeit präsentiert. Zuerst werden die theoretischen Ergebnisse zu den Übergangsformfaktoren mit den neuesten experimentellen Ergebnissen verglichen. Dabei werden wir die reinen LCSR Resultate mit denen geeigneter Fitfunktionen gegenüberstellen. Im zweiten Teil erweitern wir das Modell und zeigen die Plots der Streuquerschnitte und Strukturfunktionen für $k \neq 0$, also für die softe Pionproduktion.

11.1 Ergebnisse zu $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$

Für die Präsentation der numerischen Ergebnisse zu den Übergangsformfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ wollen wir vorerst nur die reinen LCSR Resultate der Formfaktoren in (10.8) verwenden. Im Threshold Grenzfall $W = M + m_\pi$ und für $Q^2 \leq 7.5 \text{ GeV}^2$ erhalten wir mit Hilfe der LCSR

$$\begin{aligned} \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{F_2^n(W, Q^2)}{F_2^p(W, Q^2)} &= 0.41(0.23), \\ \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_1^n(W, Q^2)}{g_1^p(W, Q^2)} &= 0.44(0.21). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Für die Asymmetrien ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} A_1^p &= \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_1^p(W, Q^2)}{F_1^p(W, Q^2)} = 0.81(0.64), \\ \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} A_1^n &= \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_1^n(W, Q^2)}{F_1^n(W, Q^2)} = 1.07(0.64) \end{aligned} \quad (11.2)$$

und

$$\lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} A_2^p = \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_2^p(W, Q^2)}{F_2^p(W, Q^2)} = -0.55(-0.49),$$

$$\lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} A_2^n = \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} \frac{g_2^n(W, Q^2)}{F_2^n(W, Q^2)} = -0.6(-0.45). \quad (11.3)$$

Dabei ergab sich vor allem in Bezug auf A_1^p eine große Dynamik in Q^2 und somit eine starke Veränderung in großen x Bereichen, tendierend zu 1. Im Gegensatz zur partonischen Vorhersage von $A_2^p = 0$ bekommen wir mit Hilfe von Summenregeln eine beträchtliche Abweichung davon und einen Wert von -0.5 bzw. -0.6 . Bei einem Vergleich der Ergebnisse von (11.1) mit den Ergebnissen [71, 72] kommt es zu einer bemerkenswerten Übereinstimmung mit der partonischen Vorhersage von $F_2^n/F_2^p = 3/7$ obwohl das Modell und die Threshold-Physik unterschiedlich sind. In Bezug auf die Ergebnisse (11.1)-(11.3) ist die starke Abhängigkeit von der Wahl der nicht-perturbativen Parameter auffällig. Dies darf wiederum nicht als Rückschlag der Methodik der LCSR verstanden werden. Vielmehr zeigt dies die starke Sensitivität der Ergebnisse in der Wahl der Nukleonwellenfunktion und der Parameter.

Um die Abhängigkeit in den nicht-perturbativen Parametern zu minimieren, drücken wir in Zukunft die Formfaktoren durch geeignete Fitfunktionen aus, welche sich in den letzten Jahren als am realistischsten im Vergleich zum Experiment erwiesen haben. Unter einer Vielzahl von unterschiedlichen Fitfunktionen hat sich die Parametrisierung des magnetischen Formfaktors $G_M^{p,n}$ aus [73] durchgesetzt, da die experimentellen Daten mit Abstand am besten beschrieben werden. Für den elektrischen Formfaktor ist eine adequate Parametrisierung schwierig, da entsprechende Funktionen mit den experimentellen Ergebnissen von etwa ab 6 GeV^2 nur grob übereinstimmen. Nichtsdestotrotz wählen wir die Form [74], welche mit den JLAB Daten im Bereich von $0.5 < Q^2 < 5.6 \text{ GeV}^2$ wiedergibt. Speziell wählen wir also:

$$\begin{aligned} \mu_p \frac{G_E^p}{G_M^p} &= 1 - 0.13(Q^2 - 0.04), \\ G_M^p(Q^2) &= \mu_p \frac{1}{1 + 0.116Q + 2.874Q^2 + 0.241Q^3 + 1.006Q^4 + 0.345Q^5}, \\ G_M^n(Q^2) &= \mu_n \frac{1}{1 + 0.14Q + 3.39Q^2 - 2.07Q^3 + 3.09Q^4}, \\ F_1^p(Q^2) &= \frac{4G_E^p m_N^2 + G_M^p Q^2}{4m_N^2 + Q^2}, \\ F_2^p(Q^2) &= -\frac{4(G_E^p - G_M^p)m_N^2}{4m_N^2 + Q^2}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Da die beiden Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ für exakt Threshold gelten, besteht ein Zusammenhang zwischen ihnen und den beiden Multipolen E_0^+ und L_0^+ entsprechend der Argumentation in Abschnitt 3.2. In Abb. 11.1 und Abb. 11.2 sind die Ergebnisse durch die Dipolformel

$$G_D(Q^2) = 1/(1 + Q^2/\mu_0^2)^2, \quad (11.5)$$

wobei $\mu_0^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$, normiert. Abb. 11.3 zeigt die theoretischen Vorhersagen zu den Threshold-Multipolen $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$ (siehe (4.27)) mit Hilfe des Modells (11.4) (durchgezogene Linie) und die Ergebnisse mit reinem LCSR Input (gestrichelte Linie) im Vergleich zu Punkten extrapoliert aus einer Partialwellenanalyse (PWA) der Messergebnisse. Deutlich erkennbar ist die Verschiedenheit zwischen den Extrapolationsergebnissen der Messdaten von MAID07 (grüne Punkte) und denen von GWU07. Hauptquelle der MAID07 Partialwellenanalyse waren Daten der GWU/SAID Gruppe und neueste Daten aus Bonn und des JLAB. Die Fitprozedur war dabei in einem ersten Schritt die Daten auf ein fixes Q^2 (*single- Q^2 fit*) zu fitten. Diese Verfahrensweise ist analog zur PWA von Pion-Photoproduktion, außer in den longitudinalen Kopplungen der Resonanzen, siehe [54]. In einem zweiten Schritt wurde eine homogene, durchgehende Q^2 Abhängigkeit der elektromagnetischen Übergangsformfaktoren [54] angenommen. Durch Abstimmung der

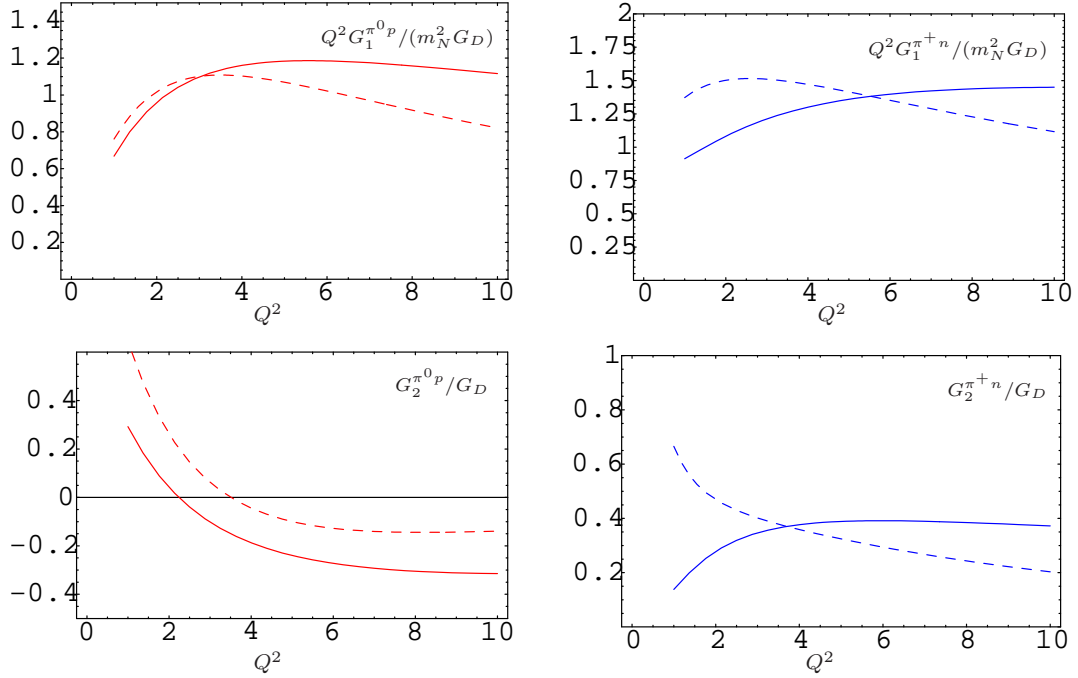


Abbildung 11.1: Das LCSR-basierte Grundmodell für die beiden verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi^+ n}$ und $G_2^{\pi^0 p}$ (linke Plots) und entsprechende Vorhersagen für $G_1^{\pi^0 p}$ und $G_2^{\pi^+ n}$ (rechte Plots). Die durchgezogenen Linien entsprechen den Ergebnissen der Summenregeln unter Verwendung der Fitfunktionen (11.4). Während die gestrichelten Linien dem reinen LCSR Resultat unter Verwendung des BLW Satzes an nicht-perturbativen Parametern entsprechen.

beiden Ergebnisse aus dem *single- Q^2 fit* mit der Formfaktorparametrisierung wurde ein globaler Fit und damit eine Q^2 Abhängigkeit (*super-global fit*) entwickelt und daraus die MAID07 Daten gewonnen.

Während die MAID07 Punkte im Prinzip keine Energieabhängigkeit in W besitzen, ist die Situation in Bezug auf die GWU07 Punkte völlig anders. Bereits eine kleine Energiedifferenz von nur 10 MeV führt zu erheblich unterschiedlichen Punkten. Für Werte von $W = 1103$ MeV und $W = 1093$ MeV sind die Unterschiede noch moderat, wohingegen alle Ergebnisse zu $W = 1083$ MeV sich signifikant von den der anderen beiden Punkt-Sätze abheben. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass die numerischen Methoden in der PWA zur Extraktion der Werte besonders in der sehr nahen Threshold-Region noch weiterer Untersuchungen bedarf. Tatsächlich wird bis zum jetzigen Zeitpunkt, insbesondere in Bezug auf den numerischen Algorithmus, noch an der PWA im Bereich von $W_{th} < W \lesssim 1100$ MeV gearbeitet. Dies sollte verdeutlichen, dass es numerisch außerordentlich schwierig ist, Punkte innerhalb einer PWA aus der Messung zu extrahieren, da vor allem Fehler in der Statistik nahe der Threshold das Ergebnis ganz besonders beeinflussen können.

Innerhalb eines Vergleichs der theoretischen mit den experimentellen Ergebnissen aus Abb. 11.3 sind folgende Punkte herauszustellen:

- $E_{0+}^{\pi^0 p}/G_D$: Wie bereits erwähnt, sind die MAID07 Werte kaum energieabhängig. Besonders für $Q^2 = 1 \text{ GeV}^2$ treffen die MAID07 Werte unser theoretisches Ergebnis beinahe exakt. Für größer werdende Virtualitäten entsteht eine kleine Abweichung in der Amplitude, jedoch ist unser Ergebnis immer noch in guter Übereinstimmung mit MAID07. Die Situation ändert sich, bei Betrachtung der GWU07 Punkte. Nicht nur, dass bei ihnen eine erhebliche Energieabhängigkeit in W besteht, auch weicht die Kurve von den Werten zum Teil deutlich ab. Eine Begründung in der Unterschiedlichkeit der beiden

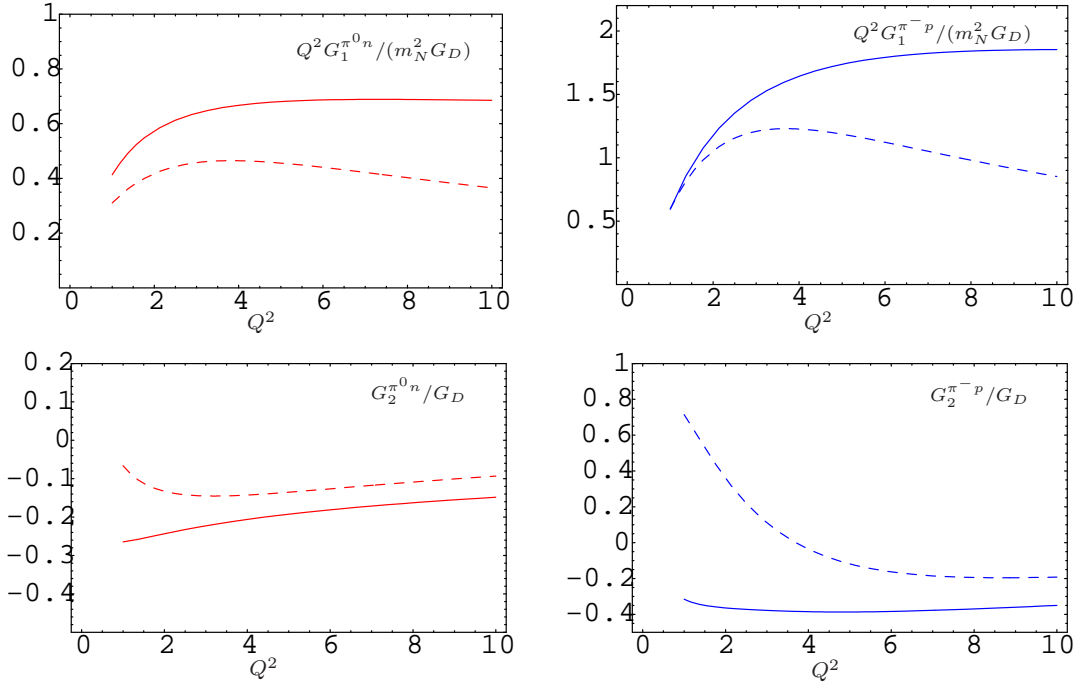


Abbildung 11.2: Das LCSR-basierte Grundmodell für die beiden verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi^0 n}$ und $G_2^{\pi^0 n}$ (linke Plots) und entsprechende Vorhersagen für $G_1^{\pi^- p}$ und $G_2^{\pi^- p}$ (rechte Plots). Die durchgezogenen Linien entsprechen den Ergebnissen der Summenregeln unter Verwendung der Fitfunktionen (11.4). Während die gestrichelten Linien dem reinen LCSR Resultat unter Verwendung des BLW Satzes an nicht-perturbativen Parametern entsprechen.

PWA-Ergebnisse besteht sicherlich darin, dass MAID07 und GWU07 verschiedene Algorithmen hinsichtlich der PWA verwenden und so differierende Extrapolationsergebnisse erhalten. Für detaillierte Angaben zur Extraktion der GWU07 Punkte aus der Datenbank sei an dieser Stelle auf u.a. [75] verwiesen.

- $L_{0+}^{\pi^0 p}$, E_{0+n}^+ , L_{0+n}^+ : Für die restlichen Daten ist die Situation ähnlich. Die MAID07 Punkte sind stets praktisch energieunabhängig, während die GWU07 Ergebnisse hoch sensitiv in W reagieren. Prinzipiell geben die MAID07 Werte unsere theoretischen Vorhersagen wieder. Im Gegensatz dazu bewegen sich die PWA-Extrapolationsergebnisse von GWU07 speziell für $W = 1083$ MeV von den theoretischen Vorhersagen weg.

Abb. 11.4 zeigt den S-Wellen Beitrag zum totalen Streuquerschnitt ($Q^6\sigma$). Die physikalische Situation ist zu jener wie in Abb. 11.3 dargestellt sehr ähnlich, da die Threshold-Multipole wegen (4.26) nichts anderes als direkter Input für die S-Wellen-Streuquerschnitte sind. Im Gegensatz zu der Vorhersage von

$$Q^6\sigma \sim \text{const.} \quad (11.6)$$

von etwa $Q^2 \gtrsim 5$ an steigen die Punkte, sowohl von MAID07 als auch von GWU07, stets in Q^2 an. Ebenso ersichtlich ist, dass wir speziell für kleine W viel mehr π^+ als π^0 vorhersagen*. Im pQCD Regime von $Q^2 \rightarrow \infty$ erwartet man, dass $G_2^{\pi^0 N}$ im Vergleich zu $Q^2 G_1^{\pi^0 N}$ um den Faktor $1/Q^2$

*Die ist ebenso aus Abb. 11.3 leicht erkennbar.

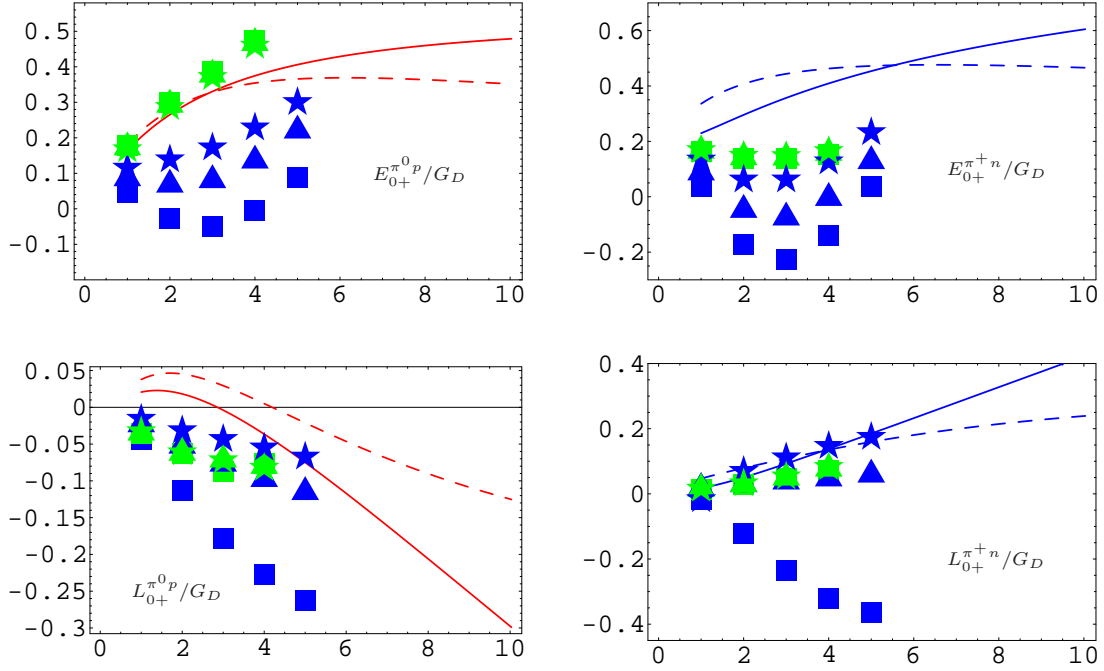


Abbildung 11.3: Das LCSR-basierte Modell (durchgezogene Linien) für die Q^2 Abhängigkeit der elektrischen und longitudinalen Partialwellen auf der Threshold von E_{0+} und L_{0+} , (4.27), in Einheiten von GeV^{-1} , normiert auf die Dipolformel (11.5). Die grünen Punkte (■, ▲, ★) sind Ergebnisse von MAID07 und die blauen Werte (■, ▲, ★) sind Ergebnisse der GWU (George-Washington University) Kollaboration aus 2007. Letztere wollen wir im Folgenden GWU07 nennen. Geplottet sind Punkte für $W = 1083 \text{ MeV}$ (■), $W = 1093 \text{ MeV}$ (▲) und $W = 1103 \text{ MeV}$ (★).

unterdrückt ist und deshalb $R_{\text{th}} \sim 1/Q^2$. In der LCSR Näherung ergibt sich jeweils eine zu den Proton Formfaktoren F_1 und F_2 ähnliche Q^2 Abhängigkeit. Da bei mittleren Energieüberträgen $1 < Q^2 < 6 \text{ GeV}^2$ das beobachtete Verhältnis von F_2/F_1 sich mehr wie $F_2/F_1 \sim 1/Q$ anstatt des erwarteten $F_2/F_1 \sim 1/Q^2$ verhält, ist R_{th} verstärkt. Insofern erhalten wir mit unserer Parametrisierung und unter Verwendung des Soft-Pion Ergebnisses (für $m_\pi \rightarrow 0$)

$$R_{\text{th}} = \sigma_L^{\gamma^*} / \sigma_T^{\gamma^*} = \lim_{W \rightarrow W_{\text{th}}} R = \left(\frac{m G_2^{\pi N}}{2Q G_1^{\pi N}} \right)^2 \quad (11.7)$$

einen Wert von $R_{\text{th}} = 0.21$. Die vollständigen Ausdrücke ergeben etwas kleinere Werte von $R_{\text{th}} = 0.13 \div 0.16$ für $Q^2 = 4 \div 9 \text{ GeV}^2$, mit einer leichten Q^2 Abhängigkeit.

11.2 Ergebnisse zu den Strukturfunktionen und Streuquerschnitten

In diesem Abschnitt werden die exakten numerischen Ergebnisse zu den Strukturfunktionen und Streuquerschnitten unter abermaliger Verwendung der Parametrisierungen (11.4) gezeigt. Numerisch ist der Unterschied zwischen den exakten Ausdrücken (A.12)-(A.13) und den vereinfachten Ergebnissen (4.6) klein.

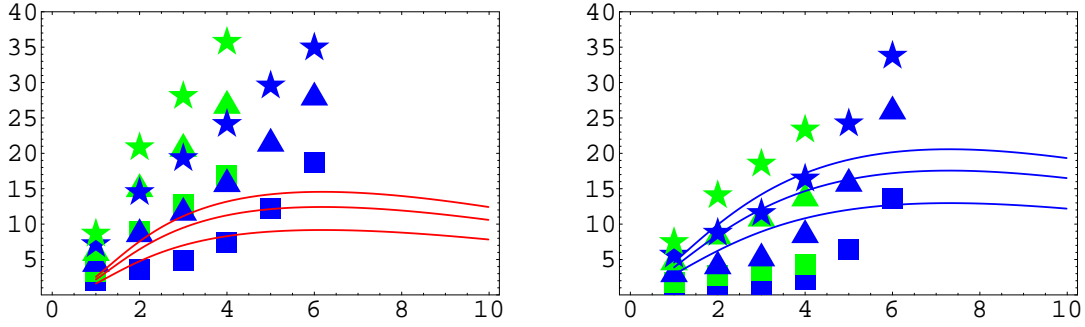


Abbildung 11.4: Theoretische Vorhersagen für den S-Wellen Beitrag von $Q^6\sigma$ aufgetragen gegen Q^2 unter Verwendung der Formfaktor-Parametrisierung (11.4) im Vergleich zum S-Wellen Beitrag zum totalen Streuquerschnitt $Q^6\sigma$. Linker Plot entspricht $Q^6\sigma_{\gamma^*p \rightarrow \pi^0 p}$ (in Einheiten von $\mu\text{b} \times \text{GeV}^6$) und rechts ist entsprechend $Q^6\sigma_{\gamma^*p \rightarrow \pi^+ n}$ dargestellt.

Im chiralen Limes von $m_\pi \rightarrow 0$ ändert sich das Ergebnis um weniger als 20%. Dies fällt also bei unserem Grad der Genauigkeit nur sehr wenig ins Gewicht. Die Vorhersagen sind, mit Ausnahme des Punktes

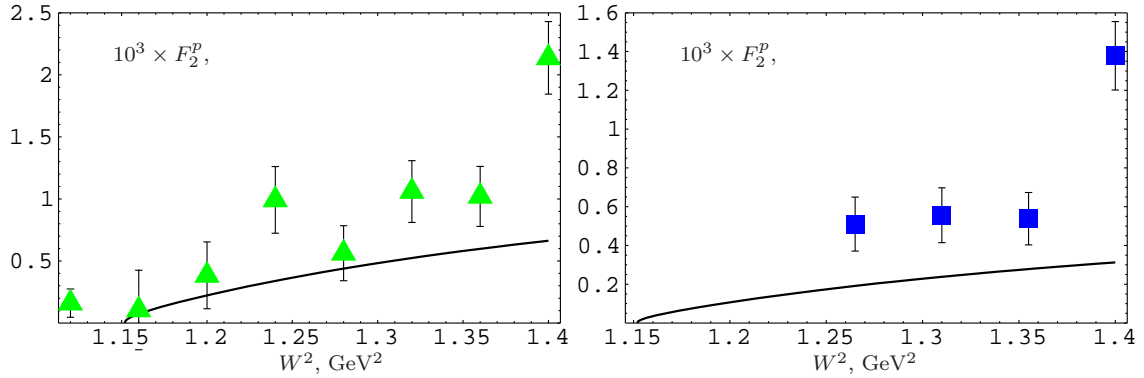


Abbildung 11.5: Die Strukturfunktion $F_2^p(W, Q^2)$ als Funktion von W^2 skaliert durch einen Faktor 10^3 verglichen mit den SLAC E136 Daten [76] bei einem durchschnittlichen Wert von $Q^2 = 7.14 \text{ GeV}^2$ (linker Plot) und $Q^2 = 9.43 \text{ GeV}^2$ (rechter Plot).

bei $W^2 = 1.4 \text{ GeV}^2$, in beiden Fällen unterhalb der Daten (etwa $\sim 30 - 50\%$). Die beiden Werte für $W^2 = 1.4 \text{ GeV}^2$ liegen signifikant höher als die restlichen Werte der Datensätze. Zu beachten ist wiederum, dass unser Modell keine D-Wellen Terme beinhaltet und ebenso FSI-Beiträge nicht integriert sind. Beide Effekte können die Vorhersagen erhöhen, sodass wir das Ergebnis als zufriedenstellend betrachten können. Im Speziellen kann davon ausgegangen werden, dass der Punkt bei $W^2 = 1.4 \text{ GeV}^2$ bereits große Anteile an D-Wellen Beiträgen beinhaltet und so bereits von den Ausläufern der Δ -Resonanz beeinflusst wird. Die S-Wellen und P-Wellen Beiträge sind in Abb. 11.6 als Funktion von W^2 für $Q^2 = 7.14 \text{ GeV}^2$ gezeigt. Erkennbar ist, dass die P-Wellen Beiträge bis zu Werten von $W \sim 1.16 \text{ GeV}$ kleiner als die S-Welle ist. Dieses Ergebnis ist allerdings hochsensitiv und abhängig von der jeweilig gewählten Parametrisierung der Formfaktoren. Die quantitativen Gewichte der beiden Wellen werden jedoch, unabhängig von der Wahl in den Fit-Funktionen der Formfaktoren, im Grunde stets reproduziert. Der Beitrag des $\pi^0 p$ Endzustandes zu der Strukturfunktion $F_2^p(W, Q^2)$ ergab sich mit ungefähr 30% als konstant in einem breiten Q^2 - und W -Bereich, siehe Abb. 11.6.

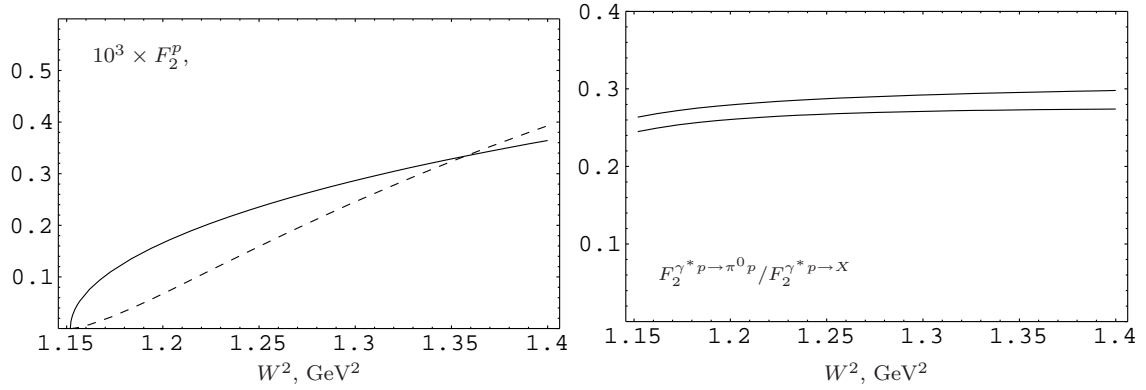


Abbildung 11.6: *Linker Plot: Die S-Wellen (durchgezogene Linie) vs. die P-Wellen (gestrichelte Linie) Beiträge zu der Strukturfunktion $F_2^p(W, Q^2)$ als eine Funktion von W^2 für $Q^2 = 7.14 \text{ GeV}^2$. Rechter Plot: Die Beiträge des $\pi^0 p$ Endzustands zu der Strukturfunktion $F_2^p(W, Q^2)$ als eine Funktion von W^2 für $Q^2 = 3 \text{ GeV}^2$ (obere Kurve) und $Q^2 = 9 \text{ GeV}^2$ (untere Kurve).*

Um die numerischen Ergebnisse zu verdeutlichen dient Abb. 11.7 als Beispiel. Den Plot zum differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma_{\gamma^* p \rightarrow \pi^0 p}/d\Omega_\pi$ betreffend, ist im Prinzip keine Azimuthal-Winkel (ϕ_π) Abhängigkeit erkennbar. Dies ist wegen der fast vollständigen Kompensierung der Beiträge von G_1 und G_2 in M_{LT} für ein festes Q^2 und ist nicht eindeutig und keineswegs stets vorhanden. Es hängt vielmehr von der Wahl der Parametrisierung ab und ist deshalb sehr sensitiv. Der integrierte Streuquerschnitt verhält sich für $Q^2 \gtrsim 5 \text{ GeV}^2$

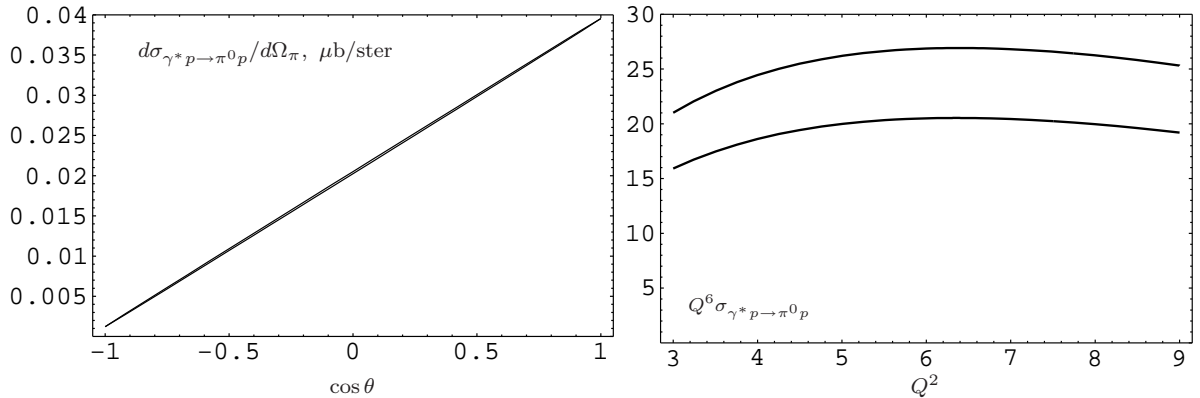


Abbildung 11.7: *Linker Plot: Der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma_{\gamma^* p \rightarrow \pi^0 p}/d\Omega_\pi$ (in μb) als eine Funktion von $\cos\theta$ für $\phi_\pi = 135 \text{ grad}$ für $Q^2 = 4.2 \text{ GeV}^2$ und $W = 1.11 \text{ GeV}$. Rechter Plot: Der integrierte Streuquerschnitt $Q^6 \sigma_{\gamma^* p \rightarrow \pi^0 p}$ (in Einheiten von $\mu\text{b} \times \text{GeV}^6$) als eine Funktion von Q^2 für $W = 1.11 \text{ GeV}$ (untere Kurve) und $W = 1.15 \text{ GeV}$ (obere Kurve).*

wie

$$\sigma_{\gamma^* p \rightarrow \pi^0 p} \sim 1/Q^6, \quad (11.8)$$

was mit den SLAC E136 Daten in Einklang ist.

11.3 Zusammenfassung des Kapitels

Wir haben die theoretischen Vorhersagen mit verfügbaren experimentellen Ergebnissen verglichen. Innerhalb einer Analyse der beiden Threshold-Multipole $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$ kam es zu einem heterogenen Bild in der Übereinstimmung. Während die Ergebnisse einer PWA der GWU-Gruppe (mit den GWU07 Punkten) vor allem für $W = 1083$ MeV nur schlecht übereinstimmt, sind bei einem Vergleich mit den MAID07 Punkten sehr gute Übereinstimmungen erkennbar. Es fällt ins Auge, dass die GWU07 Punkte sehr stark W abhängig sind. Ganz besonders hebt sich innerhalb derer der Datensatz zu $W = 1083$ MeV von den anderen beiden Sätzen zu $W = 1093$ MeV, $W = 1103$ MeV ab. Dieses Verhalten ist überraschend und eine weitere statistische Fehleranalyse ist in dieser Hinsicht wünschenswert. Im Gegensatz dazu sind die MAID07 Punkte praktisch W -unabhängig.

Im zweiten Teil wurden die Modell-Ergebnisse mit den SLAC 136 Daten zu den Strukturfunktionen verglichen. Die Vorhersagen sind etwa 30% unter den Messpunkten, wenn man von dem Punkt bei $W = 1.4$ GeV² absieht. Wir glauben, dass speziell dieser Punkt Beiträge von den Ausläufern der Δ -Resonanz enthält. Des Weiteren konnten wir das Skalierungsverhalten von $\sigma_{\gamma^* p \rightarrow \pi^0 p} \sim 1/Q^6$ aus SLAC E136 Experiment reproduzieren.

12

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, die PEp nahe der Threshold unter Verwendung eines LCSR-basierten Modells zu beschreiben. Die folgenden Punkte sollen noch einmal herausgestellt werden:

Im Rahmen von Kap. 2 wurde in das berühmte Partonmodell des Nukleons eingeführt. Wir vollzogen den Übergang von punktförmigen Teilchen, hin zu elementaren Bausteinen die einer Verteilungsfunktion unterliegen. In der Literatur ist dabei meist von der Partonverteilungsfunktion die Rede.

Für eine beispielhafte Wellenfunktion wurden unterschiedliche Vorhersagen in Bezug auf u.a. die Asymmetrie vorgestellt. Die experimentelle Bestimmung des charakteristischen Wertes von F_2^n/F_2^p stellt experimentell jedoch, wegen der schwierigen Extraktion der Neutron Strukturfunktion, hohe Anforderungen, weil sie nicht direkt gemessen werden kann. Prinzipiell kann sie allerdings indirekt aus der Messung der Strukturfunktion des Deuterons extrahiert werden. Theoretische Modelle machen es anschließend möglich, die Werte für F_2^n zu bestimmen. Im Allgemeinen beeinflusst vor allem das **Fermi-Smearing** die Messung für sehr große x erheblich und lässt deshalb keine endgültigen und exakten Ergebnisse über z.B. F_2^n/F_2^p zu.

Nach Einführung der allgemeinen Kinematik der PEp (siehe Kap. 3.1) wurde in Kap. 3.2 dargestellt, dass die Streuamplitude in einen vollständigen Satz von CGLN Amplituden entwickelt werden kann, wovon insgesamt sechs voneinander unabhängig waren. Für den Threshold-Grenzfall $W = m_N + m_\pi$ reduziert sich die Expansion (3.15) auf nur zwei Beiträge, den longitudinalen ($L_{0+}^{\pi N}$) und elektrischen ($E_{0+}^{\pi N}$) Threshold-Multipol.

Im Grenzfall von $m_\pi \rightarrow 0$, $|\vec{k}| = 0$ und $Q = \mathcal{O}(m_\pi)$ kann gezeigt werden, dass der Streuprozess auf insgesamt vier Diagramme reduziert werden kann. Ein erster Term entsteht wegen der chiralen Rotation der axialen Ladung Q_5 mit dem elektromagnetischen Strom, siehe Abb. 3.2. Innerhalb einer Partialwellenzerlegung spricht man dann von einer S-Welle. Die Emission des Pions wird durch die drei Poldiagramme Abb. 4.4 beschrieben. Dabei kann das Pion in drei unterschiedlichen Kanälen erzeugt werden. Im Spezialfall von impulslosen Pionen ($\vec{k} = 0$) ergibt sich für die invariante Energie $W_{th} = m_N + m_\pi$. In diesem Zusammenhang sprechen wir von *Threshold Pionproduktion*. Analog zur Parametrisierung des hadronischen Matrixelementes $\gamma^* N \rightarrow N$ wurden zwei **neue** Formfaktoren eingeführt. Auf der Threshold definierten wir aufgrund von Lorentzkovarianz und Stromerhaltung die beiden Formfaktoren mit

$$\langle N(P)\pi(k)|j_\mu^{em}(0)|p(P')\rangle = -\frac{i}{f_\pi}\bar{N}(P)\gamma_5\left\{\left(\gamma_\mu q^2 - q_\mu \not{q}\right)\frac{1}{m_N^2}G_1^{\pi N}(Q^2) - \frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m_N}G_2^{\pi N}(Q^2)\right\}N(P').$$

Im Weiteren konnte mit Hilfe des Soft-Pion-Theorems für $k_\mu = \delta P'_\mu$ und $k \sim \mathcal{O}(m_\pi)$ die Amplitude einer zusätzlichen Partialwellenuntersuchung unterzogen werden. Innerhalb dieser Analyse stellte sich heraus, dass sie in zwei voneinander unabhängige Anteile zerlegt werden kann. Einen der die chirale Rotation beschreibt (S-Welle) und einen weiteren, der vollständig durch Nukleon Formfaktoren ausgedrückt werden kann (P-Welle) und dabei gleichzeitig die Emission des Pions beschreibt. Für exakt $W_{th} = m_N + m_\pi$ fällt die P-Welle weg und es verbleibt lediglich ein Beitrag der S-Welle.

Innerhalb der CHPT eröffnet (3.42) die Möglichkeit, $E_{0+}^{\pi^+n}$ mit dem axialen Radius r_A in Verbindung zu bringen. Dies ermöglicht einen Zugang zur direkten Messung von r_A über eine Extraktion von $E_{0+}^{\pi^+n}$. Im Vergleich zu $E_{0+}^{\pi^+n}$ ist $E_{0+}^{\pi^0p}$ aufgrund der Abwesenheit der chiralen Rotation (kein g_A) um den Faktor $\sim m_\pi/m_N$ unterdrückt.

Zusätzlich wurden LETs für $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ aus [21, 35, 36] präsentiert. Sie verknüpfen Nukleon Formfaktoren mit den neu eingeführten $G_i^{\pi N}$. Im chiralen Limes $m_\pi \rightarrow 0$ vereinfachen sich die Resultate erheblich und wir haben schließlich (3.46).

In Kap. 4.1 wurden unter Verwendung der $G_i^{\pi N}$ Streuquerschnitte, Strukturfunktionen und Asymmetrien für große x berechnet. Wir erweiterten unser Modell zu Off-Threshold Pionen ($k = \delta P'$) und berechneten die physikalischen Größen unter Verwendung beider Terme (S- und P-Welle) des Soft-Pion Theorems. Die Ergebnisse zu den Strukturfunktionen $F_1^{p,n}$, $F_2^{p,n}$ und den beiden polarisierten Strukturfunktionen $g_1^{p,n}$, $g_2^{p,n}$ wurden präsentiert. Der Interferenz-Beitrag zwischen S- und P-Welle ist im Vergleich zu den beiden reinen S- und P-Wellen Beiträgen klein und beträgt nicht mehr als $\sim 15\%$. Im chiralen Limes von $m_\pi \rightarrow 0$ und für $k_f = \mathcal{O}(m_\pi)$ reduziert sich das Ergebnis und die Interferenz-Beiträge verschwinden exakt, siehe (4.6).

Aufgrund unterschiedlicher Modelle stellte Abb. 4.1 die Werte für F_2^n/F_2^p dar. Wegen der schwierigen Extraktion von F_2^n ergeben sich stark unterschiedliche, modellabhängige Ergebnisse. Nichtsdestotrotz hat sich in der Vergangenheit das Modell nach Melnitchouk et. al. durchgesetzt.

Um den Threshold Streuquerschnitt durch die Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ ausdrücken zu können wurde die Beziehung (4.27) hergeleitet. Darin können die beiden Multipole $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$ durch die Formfaktoren $G_i^{\pi N}$ ausgedrückt werden. Im chiralen Limes $m_\pi \rightarrow 0$ vereinfacht sich (4.27) erheblich und wir haben $E_{0+}^{\pi N} \sim G_1$ und $L_{0+}^{\pi N} \sim G_2$.

Kap. 5 stellt eine Einführung in die Methodik der Faktorisierung dar. Für große Impulsüberträge kann eine Amplitude gemäß dem Faktorisierungstheorem in einen ein- und auslaufenden Zustand und einen Streukern T_H zerlegt werden. Die Hauptrolle spielt dabei der Streukern T_H , welcher den harten Gluonaustausch mit und unter den Quarks beschreibt. Weiche Beiträge sind in diesem Energieregime stets stark unterdrückt. Eine bildliche Veranschaulichung der störungstheoretischen Expansion in α_s ist in Abb. 5.2 gegeben. Für die Darstellung des Streukerns T_H ist Abb. 5.1 und Abb. 5.3 geeignet. Ein und ausgehender Zustand werden stets durch eine geeignete Wellenfunktion (bzw. DAs) beschrieben. Für die einfachste Wahl der DAs, der asymptotischen, ergab sich in diesem Zusammenhang für F_2 eine sehr gute Übereinstimmung mit dem SLAC E136 Experiment, siehe [57].

In Kap. 6 wurden die Nukleon DAs vorgestellt. Grundsätzlich sind DAs als Fouriertransformierte der Wellenfunktion im Limes von $b \rightarrow 0$ definiert. Um Divergenzen abzuschneiden wurde ein Cutoff und damit eine Skala μ eingeführt. DAs sind somit skalenabhängig. Trilokale Matrixelemente konnten mit Hilfe einer Lichtkegelkinematik $z^2 = 0$ in 24 DAs und korrespondierenden Lorentzstrukturen entwickelt werden. Mit Hilfe von Spinprojektionen und aufgrund der Isospinrelationen sind insgesamt 8 Kombinationen von DAs gebildet worden, welche voneinander unabhängige DAs darstellen.

Eine Erweiterung des Formalismus stellt Kap. 7 dar. Unter Verwendung des Soft-Pion-Theorems und für exakt Threshold (also $W_{th} = m_N + m_\pi$) war es nach Anwendung von Strom- und Kommutatoralgebra möglich, Pion-Nukleon DAs (πN DAs) zu berechnen. Jene πN DAs sind vollständig aus den bereits bekannten Nukleon DAs aufgebaut und gehorchen den gleichen Symmetrierelationen. Da im auslaufenden System aus Nukleon und Pion sich die Isospinkomponenten aus 1/2 und 3/2 mischen, sind die Isospinrelationen nicht mehr gültig. Des Weiteren ergaben sich aufgrund der unterschiedlichen Momentengleichung zu

den πN DAs Twist-4 x^2 -Korrekturen, die von den Nukleon x^2 -Korrekturen abweichen.

Im Rahmen von Kap.8 kam es zur Anwendung der Nukleon DAs innerhalb von LCSR für Nukleon Formfaktoren. Ausgangspunkt war dabei die Korrelationsfunktion

$$T_{\nu}^{\pi N}(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta_p(0) j_{\nu}^{\text{em}}(x) \} | N(P) \pi(k) \rangle . \quad (12.1)$$

Die Idee dabei ist, dass zum einen der auslaufende Zustand stets durch ein ihn interpolierende Feld ersetzt wird. Zum anderen ergeben sich durch das Auskontrahieren des zeitgeordneten Produkts $T \{ \eta_p(0) j_{\nu}^{\text{em}}(x) \}$ trilokale Operatoren, welche, gesandwiched zwischen den beiden Zuständen, mit Hilfe von DAs auf dem Lichtkegel expandiert werden können. Andererseits verhilft uns eine Dispersionsrelation zum Korrelator dazu, durch Vergleich der beiden Seiten (der expliziten Lichtkegelexpansion mit der Dispersionsrelation), die beiden Formfaktoren F_1 und F_2 des Nukleons extrahieren zu können. Hauptpunkt war dabei die übliche und wohlbekannte Parametrisierung des hadronischen Subprozesses mit

$$\langle N(P - q) | j_{\mu}^{\text{em}}(0) | N(P) \rangle = \overline{N}(P - q) \left[\gamma_{\mu} F_1(Q^2) - i \frac{\sigma_{\mu\nu} q^{\nu}}{2m} F_2(Q^2) \right] N(P) . \quad (12.2)$$

LCSR- Berechnungen zu F_1 und F_2 aus [1] ergaben eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten unter Verwendung des Ioffe Stromes. Dies gab Anlass dazu, im Folgenden den Ioffe-Strom als den geeigneten zu favorisieren.

Kap. 9 repräsentiert die ersten neuen Ergebnisse der Arbeit in Bezug auf die PEP. Im ersten Teil von Kap. 9 betrachteten wir Energien für $Q^2 \ll \Lambda^3/m_{\pi}$. Innerhalb der Argumentation war es möglich mit Hilfe des standardisierten Soft-Pion Theorems und Kommutatoralgebra die Korrelationsfunktion (12.1) zu berechnen.

Für die beiden Formfaktoren konnte im chiralen Limes $m_{\pi} \rightarrow 0$ das Standardresultat reproduziert werden. Die Situation ändert sich grundlegend für den umgekehrten Energiebereich von $Q^2 \gg \Lambda^3/m_{\pi}$. Standardtechniken sind dabei nicht mehr anwendbar. Wir lösten das Problem, indem wir (12.1) mit Hilfe des LCSR Formalismus berechneten. Das Endresultat waren Summenregeln für die beiden Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$. Aufgrund der Dispersionsrelation (9.19) bestehen die Summenregeln aus einem Pol- und einem semi-disconnected Beitrag, siehe Abb. 9.1. Im letzten Teil wurden die numerischen Ergebnisse zu den Formfaktoren bestimmt. Wir beschränkten uns dabei lediglich auf Beiträge generiert durch den Pol-Term. Es wurde gezeigt, dass die Koeffizienten $N_1^{\pi^+ n}$ und $N_1^{\pi^0 p}$ im Rahmen der Genauigkeit der LCSR-Rechnung konstant sind. Somit skaliert die Größe $Q^2 G_1^{\pi N}/m_N^2$ mit dem axialen Formfaktor G_A . Für die $N_2^{\pi N}(Q^2)$ ergab sich eine Übereinstimmung in der Amplitude für beide Kanäle. Außerdem zeigten sich große Helizitätsflip-Beiträge in $G_2^{\pi N}$.

Innerhalb von Kap. 10 wurde ein LCSR basiertes Modell für die verallgemeinerten Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ vorgestellt, welches zwischen niederenergetischen Bereichen und Bereichen höherer Energien interpoliert. Ziel war es, ein Modell zu entwickeln, das sowohl für $Q^2 \ll \Lambda^3/m_{\pi}$ als auch für $Q^2 \gg \Lambda^3/m_{\pi}$ valide ist. Dazu führten wir eine Energieabhängigkeit der Kopplung des Ioffe Stromes η_I mit dem ausgehenden πN -Zustand ein. In dieser Energieabhängigkeit wurde mit Hilfe des Soft-Pion Theorems ein weiterer semi-disconnected Betrag $\sim g_A$ miteinbezogen. Die Summenregeln wurden entsprechend den drei Diagrammen aus Abb. 10.1 berechnet. Besonders wichtig ist dabei herauszustellen, dass beispielsweise in den LCSR für $\pi^0 p$ im Falle kleiner Q^2 sich Beiträge in den $G_1^{\pi N}$ dazu tendieren herauszukürzen und sich entsprechend bis auf Ordnungen in m_{π} das LET Resultat (3.46) reproduzieren lässt. Deshalb ist das Modell als Interpolationsmodell zwischen den beiden Energiebereichen zu verstehen. Die LCSR Kurven in Abb. 10.2 zeigen eine sehr geringe Abhängigkeit vom Borelparameter M , was darauf schließen lässt, dass die Summenregeln stabil sind.

Das Kap. 11 präsentiert die numerischen Ergebnisse. Für $x \rightarrow 1$ ergab sich eine hervorragende Übereinstimmung mit der partonischen Vorhersage von $F_2^n/F_2^p = 2/3$ unter Verwendung des BLW Satzes an

nicht-perturbativen Parametern. Im Anschluss daran wurde dieses Ergebnis mit anderen theoretischen Vorhersagen, welche auf unterschiedlichen Modellen basieren, verglichen. Eine instruktive Darstellung in diesem Zusammenhang gibt Abb. 4.1.

Die Asymmetrien hingegen ergaben im Vergleich zu den gemessenen Werten, siehe Abb. 4.2 und Abb. 4.3, Abweichungen und spiegelten lediglich eine ähnliche Tendenz wieder. In allen LCSR-basierten Vorhersagen ist eine sehr hohe Sensitivität bezüglich der Wahl der Parameter sichtbar. Bei Wahl der asymptotischen statt der BLW Parameter ergeben sich stark unterschiedliche Ergebnisse. Dies ist als ein Indiz dafür zu werten, dass die Ergebnisse sehr stark von der Wahl der Nukleonwellenfunktion abhängen.

Um Unbestimmtheiten in der Wahl der nicht-perturbativen Parameter aus dem Weg zu gehen, wählten wir für alle Formfaktoren (d.h. F_1, F_2 und $G_1^{\pi N}, G_2^{\pi N}$) geeignete Fit-Funktionen aus. Unter Verwendung der Fits stellten wir unsere modell-theoretischen Ergebnisse mit denen des Experiments gegenüber.

Bei einem Vergleich der Threshold-Daten, welche aus einer PWA-Analyse der Messpunkte stammen, mit den theoretischen Ergebnissen zu den Threshold-Multipolen $E_{0+}^{\pi N}$ und $L_{0+}^{\pi N}$ ergab sich ein differenziertes Bild. Während die Vorhersagen mit den Werten der MAID-Kollaboration gut übereinstimmten, ergab sich bei einem Vergleich mit den Punkten der GWU-Gruppe eine zum Teil erhebliche Diskrepanz. Im Besonderen ist die starke Abhängigkeit in W innerhalb der GWU07-Punkte auffällig, während diese bei den MAID07-Punkten fast vollständig fehlt. Ganz besonders weichen die $W = 1083$ MeV GWU-Werte von den anderen beiden Datensätzen bei $W = 1093$ MeV und $W = 1103$ MeV ab. Eine weitere Untersuchung dieses Phänomens sollte durchgeführt werden, da dieses Verhalten so nicht zu erwarten war.

Bezogen auf die Erweiterung des Modells zu Off-Threshold Pionen verglichen wir unsere Ergebnisse zu den Strukturfunktionen F_1^p und F_2^p mit den experimentellen Werten des SLAC aus dem Jahr 1994. Die Ergebnisse sind etwa 30% unterhalb der Datensätze, wenn man von dem Punkt bei $W = 1.4$ GeV² absieht. Es darf davon ausgegangen werden, dass dieser Punkt bereits Beiträge von den Ausläufern der Δ -Resonanz beinhaltet.

Das Modell kann noch in vielfältiger Weise verbessert werden. Es wird erwartet, dass FSI Wechselwirkungen aus der Rückstreuung des Pions mit dem auslaufenden Nukleon weitere Beiträge zum Streuquerschnitt liefert. Allerdings ist die Implementierung dieser Korrektur sehr kompliziert, da zwar grundsätzliche Ideen dazu existieren, jedoch eine konkrete und detaillierte theoretische Methodik zur Einbindung bislang fehlt.

12.1 Ausblick

Das vorgeschlagene Modell stellt eine Methodik dar, die PEP im Rahmen von LCSR zu betrachten. Wir haben Vorhersagen für die Formfaktoren $G_1^{\pi N}$ und $G_2^{\pi N}$ sowie für Streuquerschnitte und Strukturfunktionen getroffen. Wie mehrmals erwähnt ist das Modell noch etwas grob und kann in mancher Hinsicht verbessert werden. Es darf davon ausgegangen werden, dass zum einen FSI Beiträge die Vorhersagen besonders in der Off-Threshold Region verbessern können. Zum anderen können im Rahmen der Störungstheorie Strahlungskorrekturen in α_S berechnet werden. Erste Schritte in Richtung der Berechnung von α_S -Korrekturen sind bereits in [79] in Bezug auf die Nukleon Formfaktoren getan worden. Darin wurden in führender Ordnung Korrekturen im Formfaktor F_2 berechnet. Die grundsätzliche Idee dabei ist, F_2 in einer Störungsreihe zu schreiben:

$$F_2(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2, \mu_R^2, \mu_{R,1}^2) = F_2^{\text{LO}}(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2) + F_2^{\text{NLO}}(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2, \mu_R^2, \mu_{R,1}^2), \quad (12.3)$$

wobei

$$F_2^{\text{NLO}}(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2, \mu_R^2, \mu_{R,1}^2) = \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{4\pi} \left[F_2^{\text{NLO,fin}}(Q^2, s_0, M_B^2) + F_2^{\text{NLO,UV}}(Q^2, s_0, M_B^2) \ln \frac{\mu_{R,1}^2}{Q^2} \right]$$

$$\left. + F_2^{\text{NLO,IR}}(Q^2, s_0, M_B^2) \ln \frac{\mu_F^2}{Q^2} \right]. \quad (12.4)$$

Dabei sind die Skalen μ_F und μ_R die Faktorisierungs- und Renormalisierungsskalen, siehe [79]. Es zeigte sich, dass bereits in führender Ordnung die Korrekturen einen erheblichen Anteil an der Gesamtvorhersage haben. Ähnliche Effekte dürften LCSR Berechnungen im Rahmen der PEP erzielen.

In diesem Zusammenhang ist es wichtig, den übergeordneten Zweck der LCSR Berechnungen nicht aus den Augen zu verlieren. Das ultimative Ziel ist die Bestimmung der Nukleonwellenfunktion. Der direkte Input der Wellenfunktion sind die DAs, welche durch sechs Parameter aufgebaut sind. Sind einmal jene Parameter bekannt, so kennen wir die jeweilige Wellenfunktion. Im Prinzip gibt es drei Möglichkeiten jene Parameter zu berechnen. Eine erste besteht in Gitterberechnungen. Derzeit sind Arbeiten diesbezüglich im Gange und erste Ergebnisse zu den Kopplungskonstanten f_N , λ_1 und λ_2 wurden in [77] vorgestellt. Desweiteren können die Parameter durch Summenregeln berechnet werden. Resultate dazu sind in [1] und [63] angegeben.

Als letzten Schritt könnten die LCSR Ergebnisse zu den experimentellen Werten gefittet werden. Dies würde einen Multi-Parameter-Fit darstellen. Die Ergebnisse des Fits könnte man den theoretischen Ergebnissen anschließend gegenüber stellen. So kann eine Abschätzung durchgeführt werden, wie weit die Fitergebnisse, in Bezug auf die sechs Parameter, von den theoretischen Vorhersagen entfernt liegen.



Herleitung der Strukturfunktionen

Es werden die exakten Ausdrücke der Strukturfunktionen, polarisiert und unpolarisiert, hergeleitet. Im Allgemeinen ist es üblich den DIS Streuquerschnitt in der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \alpha_{em} \left(\frac{E}{E'} \right) L_{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

zu schreiben. Wobei $L_{\mu\nu}$ der leptonische Teil des Streuquerschnitts ist und sich wie

$$L_{\mu\nu} = 2 \left(l_\mu l'_{\nu u} + l'_\mu l_{\nu u} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.2})$$

liest.

Der hadronische Tensor $W_{\mu\nu}$ ist (im unpolarisierten Fall) gegeben durch

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M} \int \frac{d\Omega}{(4\pi)^3} \sum_{\sigma, \sigma'} \langle N(\sigma) | j_\nu^{\text{em}} | N(\sigma') \pi \rangle \langle N(\sigma') \pi | j_\nu^{\text{em}} | N(\sigma') \rangle, \quad (\text{A.3})$$

wobei σ, σ' die Spin Zustände des Nukleons festlegt und Ω der Winkel zwischen dem produzierten Nukleon und dem Pion im center-off-mass System ist. Auf der Threshold (S-Welle) gibt das Integral über $d\Omega$ einfach einen Vorfaktor 4π .

Die unpolarisierten Strukturfunktionen $F_1(W, Q^2)$ und $F_2(W, Q^2)$ parametrisieren den hadronischen Tensor $W_{\mu\nu}$ in der üblichen Form

$$W_{\mu\mu} = -\frac{F_1(W, Q^2)}{m_N} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{F_2(W, Q^2)}{m_N (P \cdot q)} \left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right). \quad (\text{A.4})$$

Den hadronischen Teil der Amplitude drücken wir auf der Threshold mit Hilfe der beiden Formfaktoren G_1 und G_2 aus

$$\langle N(P) \pi(k) | j_\mu^{\text{em}}(0) | p(P') \rangle = -\frac{i}{f_\pi} \bar{N}(P) \gamma_5 \left\{ (\gamma_\mu q^2 - q_\mu \not{q}) \frac{1}{m_N^2} G_1^{\pi N}(Q^2) - \frac{i \sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} G_2^{\pi N}(Q^2) \right\} N(P'). \quad (\text{A.5})$$

Mit Hilfe der Threshold Kinematik für $W = m_N + m_\pi$ und $P' = \frac{m_N}{m_N + m_\pi}(P + q)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F_1^{th}(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \frac{Q^2 + (2m_N + m_\pi)^2}{2m_N^3(m_N + m_\pi)} \left(G_1^{\pi N} Q^2 - \frac{1}{2} G_2^{\pi N} m_N m_\pi \right)^2, \\ F_2^{th}(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \frac{Q^2(Q^2 + m_\pi(2m_N + m_\pi))}{m_N^3(m_N + m_\pi)} \left((G_1^{\pi N})^2 Q^2 + \frac{1}{4} (G_2^{\pi N})^2 m_N^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Zur Berechnung der polarisierten Strukturfunktionen $g_1(W, Q^2)$ und $g_2(W, Q^2)$ erweitern wir den hadronischen Tensor um einen antisymmetrischen Teil. Somit liest sich der Tensor im Gesamten wie

$$\begin{aligned} W_{\mu\mu} &= W_{\mu\nu} + W_{\mu\nu} = \\ &= -\frac{F_1(W, Q^2)}{m_N} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{F_2(W, Q^2)}{m_N(P \cdot q)} \left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \\ &\quad + i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha}{P \cdot q} \left[S^\beta g_1(W, Q^2) + \left(S^\beta - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} \right) g_2(W, Q^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

und durch analoge Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} g_1^{th}(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \frac{Q^2 + (2m_N + m_\pi)^2}{2m_N^3(m_N + m_\pi)} \left(G_1^{\pi N} Q^4 - G_1^{\pi N} G_2^{\pi N} Q^2 m_N(m_N + m_\pi) \right. \\ &\quad \left. + G_2^{\pi N} \frac{m_N^2 m_\pi}{4} (2m_N + m_\pi) \right), \\ g_2^{th}(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \frac{(Q^2 + 2m_N m_\pi m_\pi^2)^2}{16m_N^4(m_N + m_\pi)} \left[G_2^{\pi N} m_N m_\pi - 2G_1^{\pi N} Q^2 \right] \\ &\quad \times \left[G_2^{\pi N} m_N + 2G_1^{\pi N} (2m_N + m_\pi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Für weiche (softe) Pionen kann das Modell erweitert werden, indem wir die Amplitude (A.5) um Anteile erweitern, welche die Pol-Terme (d.h. für $\vec{k} \neq 0$) mit in die Rechnung einbeziehen. Mit Hilfe des Soft-Pion Theorems und unter Anwendung elementarer Feynman-Regeln ergibt sich daher für den hadronischen Anteil zur Amplitude

$$\begin{aligned} \langle N(P') \pi(k) | j_\mu^{em}(0) | p(P) \rangle &= -\frac{i}{f_\pi} \bar{N}(P') \gamma_5 \left\{ (\gamma_\mu q^2 - q_\mu \not{q}) \frac{1}{m_N^2} G_1^{\pi N}(Q^2) - \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} G_2^{\pi N}(Q^2) \right\} N(P) \\ &\quad + \frac{i c_\pi g_A}{2f_\pi [(P' + k)^2 - m_N^2]} \bar{N}(P') \not{k} \gamma_5 (P' + m_N) \left\{ F_1^p(Q^2) \left(\gamma_\mu - \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} + \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_N} \right) \right\} N(P). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Oberhalb der Threshold wird die Kinematik komplizierter, da das Pion nun eine endlichen, von Null verschiedenen, Impuls besitzt. Das center-off-mass System ist definiert durch

$$\vec{P} = -\vec{q} \quad \text{oder} \quad \vec{P}' = -\vec{k} \quad (\text{A.10})$$

und es ergeben sich die nützlichen Ausdrücke

$$q_0 = \frac{W^2 + q^2 - m_N^2}{2W}, \quad k_0 = \frac{W^2 + m_\pi^2 - m_N^2}{2W},$$

$$\begin{aligned}
\vec{q}^2 &= \left(\frac{W^2 + q^2 - m_N^2}{2m_N} \right)^2 - q^2 = \left(\frac{W^2 + m_N^2 - q^2}{2W} \right), \\
\vec{k}^2 &= \left(\frac{W^2 + m_\pi^2 - m_N^2}{2W} \right)^2 - m_\pi^2 = \left(\frac{W^2 + m_\pi^2 - m_N^2}{2W} \right)^2 - m_N^2, \\
E &= W - q_0 = \frac{W^2 + m_N^2 - q^2}{2W}, \\
E' &= W - k_0 = \frac{W^2 + m_N^2 - m_\pi^2}{2W}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Durch analoge Rechnung, auf deren detaillierte Ausführung hier verzichtet sei, ergibt sich für die Strukturfunktion F_2 der folgende exakte Ausdruck:

$$\begin{aligned}
F_2(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} (W^2 + Q^2 - m_N^2)(W^2 + m_N^2 - m_\pi^2) \\
&\times \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{1}{2m_N^4 W^2} \left(|Q^2 G_1^{\pi N}|^2 + \frac{1}{4} m_N^2 Q^2 |G_2^{\pi N}|^2 \right) + \frac{c_\pi^2 g_A^2 \beta^2(W) W^2}{8(W^2 - m_N^2)^2} \left(F_1^2 + \frac{Q^2}{4m_N^2} F_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{c_\pi g_A \beta^2(W) Q^2 W^2}{2m_N^2 (W^2 - m_N^2)(W^2 + m_N^2 - m_\pi^2)} \operatorname{Re} \left(F_1^p G_1^{\pi N} + \frac{1}{4} F_2^p G_2^{\pi N} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Das entsprechende Ergebnis für $F_1(W, Q^2)$ ist

$$\begin{aligned}
F_1(W, Q^2) &= \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{|Q^2 G_1^{\pi N}|^2}{4m_N^4 W^2} \left[(W^2 + Q^2 + m_N^2)(W^2 + m_N^2 - m_\pi^2) + 4m_N^2 W^2 \right] \right. \\
&\quad + \frac{Q^2 \operatorname{Re}[G_1^{\pi N} G_2^{*, \pi N}]}{4m_N^2 W^2} \left[(Q^2 + m_N^2 - W^2)(m_N^2 - m_\pi^2 - W^2) + 4W^2(m_N^2 - W^2) \right] \\
&\quad + \frac{|G_2^{\pi N}|^2}{16m_N^2 W^2} \left[(W^2 - m_N^2)^2 (Q^2 + W^2 + m_N^2 - m_\pi^2) - Q^2 m_\pi^2 (W^2 + m_N^2) \right] \\
&\quad + \frac{c_\pi^2 g_A^2 W^2 \beta^2(W)}{64m_N^2 (W^2 - m_N^2)^2} \left[4m_N^2 F_1^2 [Q^2 (W^2 + m_N^2 - m_\pi^2) + (W^2 - m_N^2)^2 - m_\pi^2 (W^2 + m_N^2)] \right. \\
&\quad + 4m_N^2 F_1 F_2 [Q^2 (m_N^2 - m_\pi^2 + 3W^2) + (W^2 - m_N^2)(W^2 - m_N^2 + m_\pi^2)] \\
&\quad \left. + F_2^2 [Q^2 ((m_N^2 + W^2)(m_N^2 + W^2 - m_\pi^2) + 4m_N^2 W^2) + (W^2 - m_N^2)^2 (W^2 + m_N^2 - m_\pi^2)] \right] \\
&\quad + \frac{c_\pi g_A W^2 \beta^2(W)}{16m_N^2 (W^2 - m_N^2)} \operatorname{Re} \left[F_1^p G_1^{\pi N} 4Q^2 (m_N^2 + Q^2 + W^2) + F_1^p G_2^{\pi N} 2m_N^2 (m_N^2 + Q^2 - W^2) \right. \\
&\quad \left. + F_2^p G_1^{\pi N} 2Q^2 (m_N^2 + Q^2 - W^2) + F_2^p G_2^{\pi N} [Q^2 (m_N^2 + W^2) + (W^2 - m_N^2)^2] \right] \Big\}.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Für die beiden polarisierten Strukturfunktionen g_1 und g_2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 g_1(x, Q^2) = & \frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{|Q^2 G_1^{\pi N}|^2}{4m_N^4 W^2} \left[Q^2(Q^2 - m_N^2 + W^2)(m_N^2 - m_\pi^2 + W^2) \right] \right. \\
 & + \frac{\text{Re}[G_1^{\pi N} G_2^{\pi N}]}{2m_N^2} \left[Q^2(m_N^2 - Q^2 - W^2) \right] + \frac{|G_2^{\pi N}|^2}{16m_N^2 W^2} \left[(m_N^2 - W^2)(m_N^2 - Q^2 - W^2)(m_N^2 - m_\pi^2 + W^2) \right] \\
 & + \frac{g_A c_\pi \beta^2(W)}{4m_N^2} \text{Re} \left[\frac{G_1^{\pi N} F_1^p}{(W^2 - m_N^2)} Q^2 W^2 (m_N^2 - Q^2 - W^2) + \frac{G_2^{\pi N} F_2^p}{4} W^2 (m_N^2 - Q^2 - W^2) \right] \\
 & + \frac{g_A^2 c_\pi^2 \beta^2(W) W^2 (W^2 - m_N^2 + Q^2)}{64m_N^2 (W^2 - m_N^2)} \left[F_1^2 (4m_N^4 - 4m_N^2 m_\pi^2 + 4m_N^2 W^2) \right. \\
 & \left. \left. + F_2^2 (m_\pi^2 (m_N^2 - W^2) - m_N^4 + W^4) + 8F_1 F_2 m_N^2 W^2 \right] \right\}, \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 g_2(x, Q^2) = & -\frac{\beta(W)}{(4\pi f_\pi)^2} \sum_{\pi^0, \pi^+} \left\{ \frac{|Q^2 G_1^{\pi N}|^2}{8m_N^4 W^2} \left[(Q^2 - m_N^2 + W^2)^2 (m_N^2 - m_\pi^2 + 3W^2) \right] \right. \\
 & + \frac{\text{Re}[G_1^{\pi N} G_2^{\pi N}](m_N^2 - Q^2 - W^2)^2}{16m_N^4 W^2} \left[(m_N^2 - m_\pi^2)(m_N^2 + Q^2) + (m_\pi^2 + Q^2)W^2 - W^4 \right] \\
 & + \frac{|G_2^{\pi N}|^2}{16W^2} \left[(Q^2 - m_N^2 + W^2)^2 (m_N^2 - m_\pi^2 - W^2) \right] \\
 & + \frac{g_A c_\pi \beta^2(W) (Q^2 - m_N^2 + W^2)^2 W^2}{8m_N^2 (W^2 - m_N^2)} \text{Re} \left[G_1^{\pi N} F_1^p + \frac{1}{4} G_2^{\pi N} F_2^p + (m_N^2 + Q^2 - W^2) \left(\frac{G_2^{\pi N} F_1^p}{Q^2} + \frac{G_2^{\pi N} F_1^p}{m_N^2} \right) \right] \\
 & + \frac{g_A^2 c_\pi^2 \beta^2(W) W^2 (Q^2 - m_N^2 + W^2)^2}{32Q^2 m_N^2 (W^2 - m_N^2)^2} \left[F_1^2 (m_N^4 - m_\pi^4 - W^4) + \frac{1}{4} F_2^2 Q^2 (m_N^2 - m_\pi^2 + 3W^2) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} F_1 F_2 ((m_N^2 - m_\pi^2)(m_N^2 + Q^2) + (m_\pi^2 + Q^2)W^2 - W^4) \right] \right\}. \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

Im Grenzfall $W \rightarrow W_{th}$ können jeweils die Ergebnisse (A.6)-(A.8) reproduziert werden, d.h.

$$\begin{aligned}
 \lim_{W \rightarrow W_{th}} F_1(W, Q^2) &= F_1^{th}(W, Q^2), \\
 \lim_{W \rightarrow W_{th}} F_1(W, Q^2) &= F_1^{th}(W, Q^2), \\
 \lim_{W \rightarrow W_{th}} g_1(W, Q^2) &= g_1^{th}(W, Q^2), \\
 \lim_{W \rightarrow W_{th}} g_2(W, Q^2) &= g_2^{th}(W, Q^2). \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

B

Fierztransformation

Die Definition der DAs stellt die Gleichung (6.13) dar. Eine konventionelle Abkürzung kann durch (B.1) beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& 4 \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_{\alpha}^i(a_1 z) u_{\beta}^j(a_2 z) d_{\gamma}^k(a_3 z) | P(P, \lambda) \rangle \\
&= S_1(s_1)_{\alpha\beta,\gamma} + S_2(s_2)_{\alpha\beta,\gamma} + P_1(p_1)_{\alpha\beta,\gamma} + P_2(p_2)_{\alpha\beta,\gamma} + V_1(v_1)_{\alpha\beta,\gamma} + V_2(v_2)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2} V_3(v_3)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&+ \frac{1}{2} V_4(v_4)_{\alpha\beta,\gamma} + V_5(v_5)_{\alpha\beta,\gamma} + V_6(v_6)_{\alpha\beta,\gamma} + A_1(a_1)_{\alpha\beta,\gamma} + A_2(a_2)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2} A_3(a_3)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&+ \frac{1}{2} A_4(a_4)_{\alpha\beta,\gamma} + A_5(a_5)_{\alpha\beta,\gamma} + A_6(a_6)_{\alpha\beta,\gamma} + T_1(t_1)_{\alpha\beta,\gamma} + T_2(t_2)_{\alpha\beta,\gamma} + T_3(t_3)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&+ T_4(t_4)_{\alpha\beta,\gamma} + T_5(t_5)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2} T_7(t_7)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2} T_8(t_8)_{\alpha\beta,\gamma}.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Entsprechend den Fierztransformationen (6.20) in Leading Twist ergeben sich für die Strukturen des höheren Twists nach Anwendung der üblichen Trafo

$$\begin{aligned}
& (\Gamma C)_{\alpha\beta} (\Gamma' N)_{\gamma} = \frac{1}{4} \left[C_{\gamma\beta} (\Gamma \Gamma' N)_{\alpha} + (\gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma_5 \Gamma' N)_{\alpha} \right. \\
&+ \frac{1}{p \cdot z} (\not{p} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{z} \Gamma' N)_{\alpha} + \frac{1}{p \cdot z} (\not{z} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{p} \Gamma' N)_{\alpha} + (\gamma_{\perp} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^{\perp} \Gamma' N)_{\alpha} \\
&- \frac{1}{p \cdot z} (\not{p} \gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{z} \gamma_5 \Gamma' N)_{\alpha} - \frac{1}{p \cdot z} (\not{z} \gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \not{p} \gamma_5 \Gamma' N)_{\alpha} - (\gamma_{\perp} \gamma_5 C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^{\perp} \gamma_5 \Gamma' N)_{\alpha} \\
&+ \frac{1}{(p \cdot z)^2} (\sigma_{pz} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \sigma_{zp} \Gamma' N)_{\alpha} + \frac{1}{2} (\sigma_{\perp\perp'} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \sigma^{\perp\perp'} \Gamma' N)_{\alpha} \\
&\left. + \frac{1}{p \cdot z} (i \sigma_{\perp p} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^{\perp} \not{z} \Gamma' N)_{\alpha} + \frac{1}{p \cdot z} (i \sigma_{\perp z} C)_{\gamma\beta} (\Gamma \gamma^{\perp} \not{p} \Gamma' N)_{\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{B.2}$$

die Relationen [63]

$$\begin{aligned}
 (s_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(s_1 + p_1 - 2v_2 - 2a_2 + v_3 - a_3 - t_3 - 2t_2 + \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (p_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(s_1 + p_1 + 2v_2 + 2a_2 - v_3 + a_3 - t_3 - 2t_2 + \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (v_2)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(-s_1 + p_1 + v_3 + a_3 - t_3 - \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (a_2)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(-s_1 + p_1 - v_3 - a_3 - t_3 - \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (v_3)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (2s_1 - 2p_1 + 4v_2 - 4a_2 - 2t_3 - t_7)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (a_3)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (-2s_1 + 2p_1 + 4v_2 - 4a_2 + 2t_3 + t_7)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (t_2)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (-2s_1 - 2p_1 - 2t_3 + t_7)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (t_3)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(-s_1 - p_1 - 2v_2 - 2a_2 - v_3 + a_3 + t_3 - 2t_2 - \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
 (t_7)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (2s_1 + 2p_1 - 4v_2 - 4a_2 - 2v_3 + 2a_3 - 2t_3 + 4t_2 + t_7)_{\alpha\beta,\gamma}.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Die Beziehungen für Twist-5 und Twist-6 sind bis auf die Substitutionen

$$\{v_1, a_1, t_1\} \rightarrow \{v_6, a_6, t_6\} \tag{B.4}$$

und

$$\{s_1, p_1, v_2, v_3, a_2, a_3, t_2, t_3, t_7\} \rightarrow \{s_2, p_2, v_5, v_4, a_5, a_4, t_5, t_4, t_8\} \tag{B.5}$$

gleich.

Das Matricelement in (6.13) muss der Symmetrie-Bedingung

$$\langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(1) u_\beta^j(2) d_\gamma^k(3) | P \rangle + \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(1) u_\gamma^j(3) d_\beta^k(2) | P \rangle + \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\gamma^i(3) u_\beta^j(2) d_\alpha^k(1) | P \rangle = 0 \tag{B.6}$$

genügen, was aus dem Isospin 1/2 Charakter des Nukleonzustandes folgt. Speziell gilt

$$\left(T^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(1) u_\beta^j(2) d_\gamma^k(3) | P \rangle = 0, \tag{B.7}$$

wobei

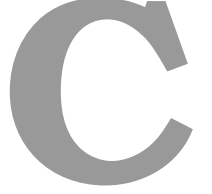
$$T^2 = \frac{1}{2} (T_+ T_- + T_- T_+) + T_3^2. \tag{B.8}$$

T_\pm ist der Isospin-Auf- und Absteigeoperator.

Mit Hilfe der Fierztransformationen (B.2) in Verbindung mit (B.3) ergibt sich [63]:

$$2T_1(1, 2, 3) = [V_1 - A_1](1, 3, 2) + [V_1 - A_1](2, 3, 1),$$

$$\begin{aligned}
[T_3 + T_7 + S_1 - P_1](1, 2, 3) &= [V_3 - A_3](3, 1, 2) + [V_2 - A_2](2, 3, 1), \\
2T_2(1, 2, 3) &= [T_3 - T_7 + S_1 + P_1](3, 1, 2) + [T_3 - T_7 + S_1 + P_1](3, 2, 1), \\
[T_4 + T_8 + S_2 - P_2](1, 2, 3) &= [V_4 - A_4](3, 1, 2) + [V_5 - A_5](2, 3, 1), \\
2T_5(1, 2, 3) &= [T_4 - T_8 + S_2 + P_2](3, 1, 2) + [T_4 - T_8 + S_2 + P_2](3, 2, 1), \\
2T_6(1, 2, 3) &= [V_6 - A_6](1, 3, 2) + [V_6 - A_6](2, 3, 1).
\end{aligned} \tag{B.9}$$



Nukleon Distributionsamplituden

Twist-3 DAs

$$\begin{aligned} V_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3 [\phi_3^0(\mu) + \phi_3^+(\mu)(1 - 3x_3)] , \\ A_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3(x_2 - x_1)\phi_3^-(\mu) , \\ T_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3 \left[\phi_3^0(\mu) - \frac{1}{2} (\phi_3^+ - \phi_3^-)(\mu)(1 - 3x_3) \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Twist-4 DAs

$$\begin{aligned} V_2(x_i, \mu) &= 24x_1x_2 [\phi_4^0(\mu) + \phi_4^+(\mu)(1 - 5x_3)] , \\ A_2(x_i, \mu) &= 24x_1x_2(x_2 - x_1)\phi_4^-(\mu) , \\ T_2(x_i, \mu) &= 24x_1x_2 [\xi_4^0(\mu) + \xi_4^+(\mu)(1 - 5x_3)] , \\ V_3(x_i, \mu) &= 12x_3 [\psi_4^0(\mu)(1 - x_3) + \psi_4^+(\mu)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + \psi_4^-(\mu)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))] , \\ A_3(x_i, \mu) &= 12x_3(x_2 - x_1) [(\psi_4^0 + \psi_4^+)(\mu) + \psi_4^-(\mu)(1 - 2x_3)] , \\ T_3(x_i, \mu) &= 6x_3 [(\phi_4^0 + \psi_4^0 + \xi_4^0)(\mu)(1 - x_3) \\ &\quad + (\phi_4^+ + \psi_4^+ + \xi_4^+)(\mu)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- + \xi_4^-)(\mu)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))] , \\ T_7(x_i, \mu) &= 6x_3 [(\phi_4^0 + \psi_4^0 - \xi_4^0)(\mu)(1 - x_3) \\ &\quad + (\phi_4^+ + \psi_4^+ - \xi_4^+)(\mu)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- - \xi_4^-)(\mu)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))] , \\ S_1(x_i, \mu) &= 6x_3(x_2 - x_1) [(\phi_4^0 + \psi_4^0 + \xi_4^0 + \phi_4^+ + \psi_4^+ + \xi_4^+)(\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\phi_4^- - \psi_4^- + \xi_4^-)(\mu)(1 - 2x_3)] , \\
 P_1(x_i, \mu) = & 6x_3(x_2 - x_1) [(-\phi_4^0 - \psi_4^0 + \xi_4^0 - \phi_4^+ - \psi_4^+ + \xi_4^+)(\mu) \\
 & +(-\phi_4^- + \psi_4^- + \xi_4^-)(\mu)(1 - 2x_3)] . \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich T_3 und T_7 nur im Vorzeichen bei den ξ -Beiträgen, während P_1 und S_1 nur im Vorzeichen der ϕ - und ψ -Beiträgen, unterscheiden.

Twist-5 DAs

$$\begin{aligned}
 V_4(x_i, \mu) = & 3 [\psi_5^0(\mu)(1 - x_3) + \psi_5^+(\mu)(1 - x_3 - 2(x_1^2 + x_2^2)) \\
 & + \psi_5^-(\mu)(2x_1x_2 - x_3(1 - x_3))] , \\
 A_4(x_i, \mu) = & 3(x_2 - x_1) [-\psi_5^0(\mu) + \psi_5^+(\mu)(1 - 2x_3) + \psi_5^-(\mu)x_3] , \\
 T_4(x_i, \mu) = & \frac{3}{2} [(\phi_5^0 + \psi_5^0 + \xi_5^0)(\mu)(1 - x_3) \\
 & + (\phi_5^+ + \psi_5^+ + \xi_5^+)(\mu)(1 - x_3 - 2(x_1^2 + x_2^2)) \\
 & + (\phi_5^- - \psi_5^- + \xi_5^-)(\mu)(2x_1x_2 - x_3(1 - x_3))] , \\
 T_8(x_i, \mu) = & \frac{3}{2} [(\phi_5^0 + \psi_5^0 - \xi_5^0)(\mu)(1 - x_3) \\
 & + (\phi_5^+ + \psi_5^+ - \xi_5^+)(\mu)(1 - x_3 - 2(x_1^2 + x_2^2)) \\
 & + (\phi_5^- - \psi_5^- - \xi_5^-)(\mu)(2x_1x_2 - x_3(1 - x_3))] , \\
 V_5(x_i, \mu) = & 6x_3 [\phi_5^0(\mu) + \phi_5^+(\mu)(1 - 2x_3)] , \\
 A_5(x_i, \mu) = & 6x_3(x_2 - x_1)\phi_5^-(\mu) , \\
 T_5(x_i, \mu) = & 6x_3 [\xi_5^0(\mu) + \xi_5^+(\mu)(1 - 2x_3)] , \\
 S_2(x_i, \mu) = & \frac{3}{2}(x_2 - x_1) [-(\phi_5^0 + \psi_5^0 + \xi_5^0)(\mu) + (\phi_5^+ + \psi_5^+ + \xi_5^+)(\mu)(1 - 2x_3) \\
 & + (\phi_5^- - \psi_5^- + \xi_5^-)(\mu)x_3] , \\
 P_2(x_i, \mu) = & \frac{3}{2}(x_2 - x_1) [-(\phi_5^0 - \psi_5^0 + \xi_5^0)(\mu) + (-\phi_5^+ - \psi_5^+ + \xi_5^+)(\mu)(1 - 2x_3) \\
 & + (-\phi_5^- + \psi_5^- + \xi_5^-)(\mu)x_3] . \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich T_4 und T_8 nur im Vorzeichen bei den ξ -Beiträgen, während P_2 und S_2 nur im Vorzeichen der ϕ - und ψ -Beiträgen, unterscheiden.

Twist-6 DAs

$$\begin{aligned}
 V_6(x_i, \mu) = & 2 [\phi_6^0(\mu) + \phi_6^+(\mu)(1 - 3x_3)] , \\
 A_6(x_i, \mu) = & 2(x_2 - x_1)\phi_6^- , \\
 T_6(x_i, \mu) = & 2 \left[\phi_6^0(\mu) - \frac{1}{2} (\phi_6^+ - \phi_6^-) (1 - 3x_3) \right] , \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

wobei μ die Renormalisierungskonstante darstellt.

Die Koeffizienten in den obigen Gleichungen können durch Kombinationen von acht nicht-perturbativen Parametern ausgedrückt werden $f_N, \lambda_1, \lambda_2, f_1^u, f_1^d, f_2^d, A_1^u, V_1^d$, welche in [63] angegeben sind. Unten stehend sind jene Relationen zwischen den obigen Koeffizienten und den nicht-perturbativen Parametern angegeben [63]:

$$\begin{aligned}\phi_3^0 &= \phi_6^0 = f_N, & \phi_4^0 &= \phi_5^0 = \frac{1}{2}(f_N + \lambda_1), \\ \xi_4^0 &= \xi_5^0 = \frac{1}{6}\lambda_2, & \psi_4^0 &= \psi_5^0 = \frac{1}{2}(f_N - \lambda_1),\end{aligned}\tag{C.5}$$

für Twist-3:

$$\phi_3^- = \frac{21}{2}f_N A_1^u, \quad \phi_3^+ = \frac{7}{2}f_N(1 - 3V_1^d),\tag{C.6}$$

für Twist-4:

$$\begin{aligned}\phi_4^+ &= \frac{1}{4}[f_N(3 - 10V_1^d) + \lambda_1(3 - 10f_1^d)], \\ \phi_4^- &= -\frac{5}{4}[f_N(1 - 2A_1^u) - \lambda_1(1 - 2f_1^d - 4f_1^u)], \\ \psi_4^+ &= -\frac{1}{4}[f_N(2 + 5A_1^u - 5V_1^d) - \lambda_1(2 - 5f_1^d - 5f_1^u)], \\ \psi_4^- &= \frac{5}{4}[f_N(2 - A_1^u - 3V_1^d) - \lambda_1(2 - 7f_1^d + f_1^u)], \\ \xi_4^+ &= \frac{1}{16}\lambda_2(4 - 15f_2^d), \quad \xi_4^- = \frac{5}{16}\lambda_2(4 - 15f_2^d),\end{aligned}\tag{C.7}$$

für Twist-5:

$$\begin{aligned}\phi_5^+ &= -\frac{5}{6}[f_N(3 + 4V_1^d) - \lambda_1(1 - 4f_1^d)], \\ \phi_5^- &= -\frac{5}{3}[f_N(1 - 2A_1^u) - \lambda_1(f_1^d - f_1^u)], \\ \psi_5^+ &= -\frac{5}{6}[f_N(5 + 2A_1^u - 2V_1^d) - \lambda_1(1 - 2f_1^d - 2f_1^u)], \\ \psi_5^- &= \frac{5}{3}[f_N(2 - A_1^u - 3V_1^d) + \lambda_1(f_1^d - f_1^u)], \\ \xi_5^+ &= \frac{5}{36}\lambda_2(2 - 9f_2^d), \quad \xi_5^- = -\frac{5}{4}\lambda_2 f_2^d\end{aligned}\tag{C.8}$$

und für Twist-6:

$$\begin{aligned}\phi_6^+ &= \frac{1}{2}[f_N(1 - 4V_1^d) - \lambda_1(1 - 2f_1^d)], \\ \phi_6^- &= \frac{1}{2}[f_N(1 + 4A_1^u) + \lambda_1(1 - 4f_1^d - 2f_1^u)].\end{aligned}\tag{C.9}$$

Die Zahlenwerte der nicht-perturbativen Parameter können mit QCD Summenregeln bestimmt werden. Bei der Skala $\mu = 1$ GeV bekommt man: [63, 78]:

$$f_N = (5.0 \pm 0.5) \cdot 10^{-3} \text{GeV}^2 \text{ [78]},$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -(2.7 \pm 0.9) \cdot 10^{-2} \text{GeV}^2 \text{ [62] ,} \\ \lambda_2 &= (5.4 \pm 1.9) \cdot 10^{-2} \text{GeV}^2 \text{ [62] .}\end{aligned}\tag{C.10}$$

Für die vier noch verbliebenen Parameter ergeben sich im Rahmen des BLW-Modells [1]

$$\begin{aligned}A_1^u &= 0.13, \quad V_1^d = 0.30, \\ f_1^d &= 0.33, \quad f_1^u = 0.09, \quad f_2^d = 0.25,\end{aligned}\tag{C.11}$$

wobei die ersten zwei sich auf Twist-3 beziehen und der Rest zu Twist-4 korrespondiert. Die asymptotischen Parameter sind [63, 78]:

$$\begin{aligned}V_1^d &= \frac{1}{3}, \quad A_1^u = 0, \\ f_1^d &= \frac{3}{10}, \quad f_1^u = \frac{1}{10}, \quad f_2^d = \frac{4}{15}.\end{aligned}\tag{C.12}$$



Die $O(x^2)$ -Korrekturen zu den Nukleon DAs

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zu den x^2 -Korrekturen vorgestellt. Auf die explizite Herleitung sei hier verzichtet. Sie kann u.a. in [1] nachgelesen werden. Nach einigen theoretischen Überlegungen ergeben sich dann für die Korrekturen die Momentengleichungen in Bezug auf x_2

$$\begin{aligned} \int dx_2 x_2^n \mathcal{V}_1^{M(u)}(x_2) &= \frac{1}{n+1} \left[V_1^{(u)(n+2)} - \frac{1}{n+3} (V_1 - V_2)^{(u)(n+2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n+2} (-2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5)^{(u)(n+2)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Dabei finden wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1^{M(u)}(x_2) &= \int_0^{1-x_2} dx_1 V_1^M(x_1, x_2, 1-x_1-x_2) \\ &= \frac{x_2^2}{24} (f_N C_f^u + \lambda_1 C_\lambda^u), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1^{M(d)}(x_3) &= \int_0^{1-x_3} dx_1 V_1^M(x_1, 1-x_1-x_3, x_3) \\ &= \frac{x_3^2}{24} (f_N C_f^d + \lambda_1 C_\lambda^d), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

mit

$$\begin{aligned} C_f^u &= (1-x_2)^3 [113 + 495x_2 - 552x_2^2 - 10A_1^u(1-3x_2) + 2V_1^d(113 - 951x_2 + 828x_2^2)], \\ C_\lambda^u &= -(1-x_2)^3 [13 - 20f_1^d + 3x_2 + 10f_1^u(1-3x_2)], \\ C_f^d &= -(1-x_3)^3 [1441 + 505x_3 - 3371x_3^2 + 3405x_3^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -1104x_3^4 - 24V_1^d(207 - 3x_3 - 368x_3^2 + 412x_3^3 \\
 & - 138x_3^4) - 12(73 - 220V_1^d) \ln[x_3], \\
 C_\lambda^d = & -(1 - x_3) \left[11 + 131x_3 - 169x_3^2 + 63x_3^3 - 30f_1^d(3 + 11x_3 - 17x_3^2 + 7x_3^3) \right] \\
 & - 12(3 - 10f_1^d) \ln[x_3].
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von [62] überein.

Analog erhalten wir für die Axial-Vektor Funktionen:

$$\begin{aligned}
 \int dx_3 x_3^n \mathcal{A}_1^{M(d)}(x_3) &= \frac{1}{n+1} \left[A_1^{(d)(n+2)} - \frac{1}{n+3} (A_1 - A_2)^{(d)(n+2)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n+2} (-2A_1 - A_3 - A_4 + 2A_5)^{(d)(n+2)} - \frac{1}{n+3} (A_1 + A_5)^{(d)(n+1)} \right], \\
 \int dx_2 x_2^n \mathcal{A}_1^{M(u)}(x_2) &= \frac{1}{n+1} \left[A_1^{(u)(n+2)} - \frac{1}{n+3} (A_1 - A_2)^{(u)(n+2)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n+2} (-2A_1 - A_3 - A_4 + 2A_5)^{(u)(n+2)} \right].
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

(D.5) kann dann mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^{M(u)}(x_2) &= \int_0^{1-x_2} dx_1 A_1^M(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) \\
 &= \frac{x_2^2}{24} (1 - x_2)^3 (f_N D_f^u + \lambda_1 D_\lambda^u), \\
 \mathcal{A}_1^{M(d)}(x_3) &= \int_0^{1-x_3} dx_1 A_1^M(x_1, 1 - x_1 - x_3, x_3) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

mit

$$\begin{aligned}
 D_f^u &= 11 + 45x_2 - 2A_1^u(113 - 951x_2 + 828x_2^2) \\
 &\quad + 10V_1^d(1 - 30x_2), \\
 D_\lambda^u &= 29 - 45x_2 - 10f_1^u(7 - 9x_2) - 20f_1^d(5 - 6x_2)
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

gelöst werden.

Es ergeben sich die Isospinrelationen [67]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_1^{M(u)}(x) &= \frac{1}{2} \left[V_1^{M(d)}(x) + V_1^{M(u)}(x) + A_1^{M(u)}(x) \right], \\
 \mathcal{T}_1^{M(d)}(x) &= V_1^{M(u)}(x) - A_1^{M(u)}(x).
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_1^{M(u)}(x) &= \frac{x^2}{48} (f_N E_f^u + \lambda_1 E_\lambda^u), \\
 \mathcal{T}_1^{M(d)}(x) &= \frac{x^2(1-x)^4}{4} (f_N E_f^d + \lambda_1 E_\lambda^d),
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

mit

$$\begin{aligned} E_f^u &= - \left[(1-x) (3(439 + 71x - 621x^2 + 587x^3 - 184x^4) \right. \\ &\quad \left. + 4A_1^u(1-x)^2(59 - 483x + 414x^2) - 4V_1^d(1301 - 619x - 769x^2 + 1161x^3 - 414x^4)) \right] \\ &\quad - 12(73 - 220V_1^d) \ln[x], \\ E_\lambda^u &= - \left[(1-x)(5 - 211x + 281x^2 - 111x^3 \right. \\ &\quad \left. + 10(1 + 61x - 83x^2 + 33x^3)f_1^d - 40(1-x)^2(2 - 3x)f_1^u) \right] - 12(3 - 10f_1^d) \ln[x], \\ E_f^d &= 17 + 92x + 12(A_1^u + V_1^d)(3 - 23x), \\ E_\lambda^d &= -7 + 20f_1^d + 10f_1^u. \end{aligned} \tag{D.10}$$



Pion-Nukleon DAs der höheren Twists

In diesem Anhang werden ohne Herleitung die Ausdrücke für die Dreiquark Pion-Nukleon DAs in den höheren Twists angegeben.

E.1 $n\pi^+$ DAs

Für Twist-4 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
V_2^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\left\{ A_3^n(1, 3, 2) - P_1^n(1, 3, 2) + S_1^n(1, 3, 2) - T_3^n(1, 3, 2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - T_7^n(1, 3, 2) - V_3^n(1, 3, 2) \right\} + \left\{ 1 \leftrightarrow 2 \right\} \right) \right\}, \\
A_2^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\left\{ A_3^n(1, 3, 2) + P_1^n(1, 3, 2) - S_1^n(1, 3, 2) + T_3^n(1, 3, 2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + T_7^n(1, 3, 2) - V_3^n(1, 3, 2) \right\} - \left\{ 1 \leftrightarrow 2 \right\} \right) \right\}, \\
V_3^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\left\{ A_2^n(1, 3, 2) - P_1^n(1, 3, 2) + S_1^n(1, 3, 2) + T_3^n(1, 3, 2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + T_7^n(1, 3, 2) + V_2^n(1, 3, 2) \right\} + \left\{ 1 \leftrightarrow 2 \right\} \right) \right\}, \\
A_3^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\left\{ -A_2^n(1, 3, 2) - P_1^n(1, 3, 2) + S_1^n(1, 3, 2) + T_3^n(1, 3, 2) \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +T_7^n(1, 3, 2) - V_2^n(1, 3, 2) \Big\} - \Big\{1 \leftrightarrow 2\Big\} \Big\}, \\
 S_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \frac{1}{4} \Big(\Big\{ A_2^n(1, 3, 2) + A_3^n(1, 3, 2) + P_1^n(1, 3, 2) + S_1^n(1, 3, 2) \\
 & + 2T_2^n(1, 3, 2) + T_3^n(1, 3, 2) - T_7^n(1, 3, 2) - V_2^n(1, 3, 2) \\
 & + V_3^n(1, 3, 2) \Big\} - \Big\{1 \leftrightarrow 2\Big\} \Big) \Big\}, \\
 P_1^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \frac{1}{4} \Big(\Big\{ -A_2^n(1, 3, 2) - A_3^n(1, 3, 2) + P_1^n(1, 3, 2) + S_1^n(1, 3, 2) \\
 & + 2T_2^n(1, 3, 2) + T_3^n(1, 3, 2) - T_7^n(1, 3, 2) + V_2^n(1, 3, 2) \\
 & - V_3^n(1, 3, 2) \Big\} - \Big\{1 \leftrightarrow 2\Big\} \Big) \Big\}, \\
 T_2^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \frac{1}{2} \Big(\Big\{ P_1^n(1, 3, 2) + S_1^n(1, 3, 2) - T_3^n(1, 3, 2) + T_7^n(1, 3, 2) \Big\} \\
 & + \Big\{1 \leftrightarrow 2\Big\} \Big) \Big\}, \\
 T_3^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \frac{1}{4} \Big(\Big\{ A_2^n(1, 3, 2) - A_3^n(1, 3, 2) - P_1^n(1, 3, 2) - S_1^n(1, 3, 2) \\
 & + 2T_2^n(1, 3, 2) - T_3^n(1, 3, 2) + T_7^n(1, 3, 2) - V_2^n(1, 3, 2) \\
 & - V_3^n(1, 3, 2) \Big\} + \Big\{1 \leftrightarrow 2\Big\} \Big) \Big\}, \\
 T_7^{n\pi^+}(1, 2, 3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \frac{1}{4} \Big(\Big\{ A_2^n(1, 3, 2) - A_3^n(1, 3, 2) + P_1^n(1, 3, 2) + S_1^n(1, 3, 2) \\
 & - 2T_2^n(1, 3, 2) + T_3^n(1, 3, 2) - T_7^n(1, 3, 2) - V_2^n(1, 3, 2) \\
 & - V_3^n(1, 3, 2) \Big\} + \Big\{1 \leftrightarrow 2\Big\} \Big) \Big\}. \tag{E.1}
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für Twist-5 DAs sind bis auf die Substitutionen

$$\begin{aligned}
 & \{S_1^{n\pi^+}, P_1^{n\pi^+}, V_2^{n\pi^+}, V_3^{n\pi^+}, A_2^{n\pi^+}, A_3^{n\pi^+}, T_2^{n\pi^+}, T_3^{n\pi^+}, T_7^{n\pi^+}\} \rightarrow \\
 & \rightarrow \{S_2^{n\pi^+}, P_2^{n\pi^+}, V_5^{n\pi^+}, V_4^{n\pi^+}, A_5^{n\pi^+}, A_4^{n\pi^+}, T_5^{n\pi^+}, T_4^{n\pi^+}, T_8^{n\pi^+}\}, \tag{E.2}
 \end{aligned}$$

mit denen von (E.1) gleich. Entsprechende Ersetzungen müssen für die Neutron DAs gemacht werden.

Die Ergebnisse zu den Twist-6 DAs sind bis auf die Substitutionen

$$\{V_1^{n\pi^+}, A_1^{n\pi^+}, T_1^{n\pi^+}\} \rightarrow \{V_6^{n\pi^+}, A_6^{n\pi^+}, T_6^{n\pi^+}\} \tag{E.3}$$

mit denen des Twist-3 identisch.

E.2 $p\pi^0$ DAS

Die Definition der DAS folgt entsprechend (7.15). Für Twist-4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
S_1^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{2}\left\{2P_1^p(1, 3, 2) - S_1^p(1, 2, 3)\right\}, \\
P_1^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{2}\left\{2S_1^p(1, 3, 2) - P_1^p(1, 2, 3)\right\}, \\
V_2^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2}V_2^p(1, 2, 3), \quad V_3^{p\pi^0}(1, 2, 3) = \frac{1}{2}V_3^p(1, 2, 3), \\
A_2^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2}A_2^p(1, 2, 3), \quad A_3^{p\pi^0}(1, 2, 3) = \frac{1}{2}A_3^p(1, 2, 3), \\
T_2^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{2}T_2^p(1, 2, 3), \quad T_3^{p\pi^0}(1, 2, 3) = \frac{1}{2}\left\{T_3^p(1, 2, 3) + 2T_7^p(1, 2, 3)\right\}, \\
T_7^{p\pi^0}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2}\left\{T_7^p(1, 2, 3) + 2T_3^p(1, 2, 3)\right\}.
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Die Ausdrücke für die Twist-5 und Twist-6 DAS sind mit denen der Twist-4 und Twist-3 Art bis auf Substitutionen, wie im Falle vom $n\pi^+$ bereits vorgeführt, identisch.

E.3 $p\pi^+$ DAS

Der Vollständigkeit halber seien hier die Ergebnisse zu den $p\pi^+$ DAS präsentiert. Sie sind durch ein korrespondierendes Matrixelement des trilokalen Lichtkegeloperators

$$\hat{O}_{\alpha\gamma\beta}^{uuu} = \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 z) u_\beta^j(a_2 z) u_\gamma^k(a_3 z) \tag{E.5}$$

definiert und können für z. B. schwache Formfaktoren, welche zum geladenen W-Boson Austausch korrespondieren, relevant sein. Die nötigen Kommutatorrelationen sind

$$\begin{aligned}
[Q_5^1, \hat{O}_{\alpha\beta\gamma}^{uuu}(z)] &= -\frac{1}{2}\left\{(\gamma_5)_{\alpha\lambda}\hat{O}_{\lambda\beta\gamma}^{duu}(z) + (\gamma_5)_{\beta\lambda}\hat{O}_{\alpha\lambda\gamma}^{udu}(z) + (\gamma_5)_{\gamma\lambda}\hat{O}_{\alpha\beta\lambda}^{uud}(z)\right\}, \\
[Q_5^2, \hat{O}_{\alpha\beta\gamma}^{uuu}(z)] &= \frac{i}{2}\left\{(\gamma_5)_{\alpha\lambda}\hat{O}_{\lambda\beta\gamma}^{duu}(z) + (\gamma_5)_{\beta\lambda}\hat{O}_{\alpha\lambda\gamma}^{udu}(z) + (\gamma_5)_{\gamma\lambda}\hat{O}_{\alpha\beta\lambda}^{uud}(z)\right\}.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

In Wirklichkeit ist keine eigene Berechnung in diesem Fall nötig. Für alle DAS gilt:

$$\begin{aligned}
S_i^{p\pi^+}(1, 2, 3) &= -S_i^{n\pi^+}(1, 2, 3) + S_i^p(1, 2, 3), \\
P_i^{p\pi^+}(1, 2, 3) &= -P_i^{n\pi^+}(1, 2, 3) + P_i^p(1, 2, 3), \\
V_i^{p\pi^+}(1, 2, 3) &= V_i^{n\pi^+}(1, 2, 3) + V_i^p(1, 2, 3), \\
A_i^{p\pi^+}(1, 2, 3) &= A_i^{n\pi^+}(1, 2, 3) + A_i^p(1, 2, 3), \\
T_i^{p\pi^+}(1, 2, 3) &= -T_i^{n\pi^+}(1, 2, 3) + T_i^p(1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{E.7}$$

E.4 $O(x^2)$ -Korrekturen

E.4.1 $\mathcal{V}_1^{\pi N, M}$ Korrekturen

Die Methodik der Berechnung von $\mathcal{O}(x^2)$ Korrekturen in der OPE von Baryon Operatoren in Diquark-Konfiguration ist in [62, 1] beschrieben. Deshalb sei an dieser Stelle auf die detaillierte Ausführung verzichtet. Die Funktionen \mathcal{V}^M können als Lösungen der Momentengleichung gefunden werden:

$$\int dx_3 x_3^n \mathcal{V}_1^{\pi N, M(d)}(x_3) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(-2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5)^{(d)(n+2)} \right]^{\pi N} \quad (\text{E.8})$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[(n+3)V_1^{(d)(n+2)} + (V_1 - V_2)^{(d)(n+2)} - (V_1 + V_5)^{(d)(n+1)} \right]^{\pi N},$$

$$\int dx_2 x_2^n \mathcal{V}_1^{\pi N, M(u)}(x_2) = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[(n+3)V_1^{(u)(n+2)} + (V_1 - V_2)^{(u)(n+2)} \right]^{\pi N}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(-2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5)^{(u)(n+2)} \right]^{\pi N}. \quad (\text{E.9})$$

Wir stellen die Lösungen in der folgenden Form dar:

$$\mathcal{V}_1^{\pi N, M(u)} = \frac{1}{24} \left\{ \lambda_1 C_\lambda^{u, \pi N} + f_N C_f^{u, \pi N} \right\},$$

$$\mathcal{V}_1^{\pi N, M(d)} = \frac{1}{24} \left\{ \lambda_1 C_\lambda^{d, \pi N} + f_N C_f^{d, \pi N} \right\}, \quad (\text{E.10})$$

wobei

$$C_\lambda^{u, p\pi^0} = -\frac{1}{2}(1-x_2)^3 \left\{ 6 + 18x_2 + 19x_2^2 + 10f_1^u x_2^2 - 3(9 + 10f_1^u)x_2^3 - 4f_1^d(1 + 3x_2 + 26x_2^2 - 25x_2^3) \right\},$$

$$C_f^{u, p\pi^0} = \frac{1}{2}(1-x_2)^3 \left\{ 6 + 18x_2 + 143x_2^2 + 297x_2^3 - 408x_2^4 - 10A_1^u(1 - 3x_2)x_2^2 \right.$$

$$\left. - 2V_1^d(4 + 12x_2 + 7x_2^2 + 599x_2^3 - 612x_2^4) \right\},$$

$$C_\lambda^{d, p\pi^0} = -\frac{1}{2} \left\{ 3x_3^2(1-x_3)(87 - 33x_3 - 13x_3^2 + 11x_3^3) + 156x_3^2 \ln[x_3] \right.$$

$$\left. + 2f_1^d \left[(1-x_3)(4 + 4x_3 - 351x_3^2 + 169x_3^3 + 49x_3^4 - 55x_3^5) - 180x_3^2 \ln[x_3] \right] \right\},$$

$$C_f^{d, p\pi^0} = -\frac{1}{2} \left\{ x_3^2(1-x_3)(1979 - 877x_3 - 1513x_3^2 + 2232x_3^3 - 816x_3^4) + 996x_3^2 \ln[x_3] \right.$$

$$\left. - 4V_1^d \left[(1-x_3)(4 + 4x_3 + 1527x_3^2 - 893x_3^3 - 923x_3^4 + 1613x_3^5 - 612x_3^6) + 720x_3^2 \ln[x_3] \right] \right\},$$

$$C_\lambda^{u, n\pi^+} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-x_2)^3 \left\{ 2 + 6x_2 - 75x_2^2 + 43x_2^3 + 4f_1^u(1 + 3x_2 + 26x_2^2 - 25x_2^3) \right.$$

$$\left. + 2f_1^d(4 + 12x_2 + 89x_2^2 - 55x_2^3) \right\},$$

$$C_f^{u, n\pi^+} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-x_2)^3 \left\{ 10 + 30x_2 + 425x_2^2 - 337x_2^3 - 30V_1^d(1 - 3x_2)x_2^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -2A_1^u(4 + 12x_2 + 17x_2^2 + 569x_2^3 - 612x_2^4)\Big\}, \\
 C_\lambda^{d,n\pi^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{(1-x_3)(-8-8x_3+441x_3^2-239x_3^3-59x_3^4+77x_3^5)+204x_3^2\ln[x_3] \\
 & +2(f_1^u+2f_1^d)\Big[(1-x_3)(4+4x_3-351x_3^2+169x_3^3+49x_3^4-55x_3^5)-180x_3^2\ln[x_3]\Big]\Big\}, \\
 C_f^{d,n\pi^+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{(1-x_3)(16+16x_3+171x_3^2-941x_3^3+847x_3^4-217x_3^5)-108x_3^2\ln[x_3] \\
 & +4A_1^u\Big[(1-x_3)(4+4x_3+1527x_3^2-893x_3^3-923x_3^4+1613x_3^5-612x_3^6)+720x_3^2\ln[x_3]\Big]\Big\}.
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

E.4.2 $\mathcal{A}_1^{\pi N, M}$ Korrekturen

In ähnlicher Art und Weise bekommen wir die Gleichungen für die \mathcal{A}^M Funktionen:

$$\begin{aligned}
 \int dx_3 x_3^n \mathcal{A}_1^{\pi N, M(d)}(x_3) &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(-2A_1 + A_3 + A_4 + 2A_5)^{(d)(n+2)} \right]^{\pi N} \\
 &+ \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[(n+3)A_1^{(d)(n+2)} + (A_1 - A_2)^{(d)(n+2)} - (A_1 + A_5)^{(d)(n+1)} \right]^{\pi N},
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}
 \int dx_2 x_2^n \mathcal{A}_1^{\pi N, M(u)}(x_2) &= \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[(n+3)A_1^{(u)(n+2)} + (A_1 - A_2)^{(u)(n+2)} \right]^{\pi N} \\
 &+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(-2A_1 + A_3 + A_4 + 2A_5)^{(u)(n+2)} \right]^{\pi N}.
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^{\pi N, M(d)} &= 0, \\
 \mathcal{A}_1^{\pi N, M(u)} &= \frac{1}{24}(1-x_2)^3 \left\{ \lambda_1 D_\lambda^{u, \pi N} + f_N D_f^{u, \pi N} \right\},
 \end{aligned} \tag{E.14}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 D_\lambda^{u, p\pi^0} &= -\frac{1}{2} \left\{ x_2^2(29-45x_2) + 2f_1^u(4+12x_2-51x_2^2+45x_2^3) - 4f_1^d(2+6x_2+17x_2^2-30x_2^3) \right\}, \\
 D_f^{u, p\pi^0} &= -\frac{1}{2} \left\{ 8+24x_2-21x_2^2+2A_1^u(4+12x_2-9x_2^2-609x_2^3+612x_2^4)+45x_2^3+10V_1^d x_2^2(1-3x_2) \right\}, \\
 D_\lambda^{u, n\pi^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 3x_2^2(47-55x_2) - 4f_1^u(2+6x_2+17x_2^2-30x_2^3) + 2f_1^d(4+12x_2-221x_2^2+255x_2^3) \right\}, \\
 D_f^{u, n\pi^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 16+48x_2-35x_2^2+1323x_2^3-1224x_2^4+2A_1^u(8+24x_2-13x_2^2-1233x_2^3+1224x_2^4) \right. \\
 & \left. +6V_1^d(4+12x_2-9x_2^2-609x_2^3+612x_2^4) \right\}.
 \end{aligned} \tag{E.15}$$

Literaturverzeichnis

- [1] V. M. Braun, A. Lenz and M. Wittmann, Phys. Rev. D **73** (2006) 094019 [arXiv:hep-ph/0604050].
- [2] V. M. Braun, D. Y. Ivanov, A. Lenz and A. Peters, Phys. Rev. D **75** (2007) 014021 [arXiv:hep-ph/0611386].
- [3] V. M. Braun, D. Y. Ivanov and A. Peters, arXiv:0710.3265 [hep-ph], to be published in Phys. Rev. D.
- [4] V. M. Braun, D. Y. Ivanov and A. Peters, arXiv:0709.2319 [hep-ph].
- [5] A. Peters, arXiv:0709.1807 [hep-ph].
- [6] R. A. Arndt, V. M. Braun, W. J. Briscoe, D. .Yu. Ivanov, A. Peters, I. I. Strakovsky and R. L. Workman, paper in preparation
- [7] C. Boros et.al., Phys. Lett. B **468** (1999) 161.
- [8] J.T. Londergan and A.W. Weise Prog. Part. Nucl. Phys **41** (1998).
- [9] G. G. Petratos, I. R. Afnan, F. Bissey, J. Gomez, A. T. Katramatou, W. Melnitchouk and A. W. Thomas, arXiv:nucl-ex/0010011.
- [10] F.E.. Close, Phys.Lett. **43** (1973) 422.
- [11] chapter 1, JLAB physis program draft (2006).
- [12] R.P.. Feynman, PhotonHadronInteractions (1972) Reading, Massachusetts.
- [13] R.D. Carlitz, Phys.Lett. **58** (1975) 345.
- [14] N. Isgur, Phys.Rev.D **59** (1999) 034013.
- [15] W. Ratzka, Dissertation, Universität Regensburg, 1995.
- [16] T. P. Welch *et al.*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2761 (1992).
- [17] E. Mazzucato *et al.*, Phys. Rev. Lett. **57**, 3144 (1986).
- [18] R. Beck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1841 (1990).
- [19] V. Bernard, N. Kaiser and U. G. Meissner, Int. J. Mod. Phys. E **4**, 193 (1995).
- [20] A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **36**, 589 (1972).
- [21] S. Scherer and J. H. Koch, Nucl. Phys. A **534**, 461 (1991).
- [22] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low, and Y. Nambu, Phys. Rev, **106** (1957) 1345.
- [23] F. A. Berends, A. Donnachie and D. L. Weaver, Nucl. Phys. **B4** (1967) 1.

- [24] D. Drechsel and L. Tiator, J. Phys. G: Nucl. Phys. **18** (1992) 449
- [25] D. Drechsel, O. Hanstein, S. S. Kamalov and L. Tiator, Nucl. Phys. A **645** (1999) 145 [arXiv:nucl-th/9807001].
- [26] E. Amalidi, S. Fubini and G. Furlan, Pion-Electroproduction, Springer Tracts in Modern Physics, Springer Verlag (1979).
- [27] T. Kitagaki *et al.*, “High-Energy Quasielastic Muon-Neutrino $N \rightarrow \mu^- p$ Scattering In Phys. Rev. D **28**, 436 (1983).
- [28] L. A. Ahrens *et al.*, “Measurement of Neutrino - Proton and anti-neutrino - Proton Elastic Phys. Rev. D **35**, 785 (1987).
- [29] L. A. Ahrens *et al.*, “A STUDY OF THE AXIAL VECTOR FORM-FACTOR AND SECOND CLASS CURRENTS IN Phys. Lett. B **202**, 284 (1988).
- [30] A. Del Guerra *et al.*, “Threshold π^+ electroproduction at high momentum transfer: a Nucl. Phys. B **107**, 65 (1976).
- [31] M. G. Olsson, E. T. Osypowski and E. H. Monsay, Phys. Rev. D **17**, 2938 (1978).
- [32] V. Bernard, N. Kaiser and U. G. Meissner, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1877.
- [33] Y. Nambu and D. Lurie, Phys. Rev. **125**, 1429 (1962).
- [34] V. Bernard, N. Kaiser and U. G. Meissner, Nucl. Phys. B **383** (1992) 442.
- [35] N. M. Kroll, M. A. Ruderman Phys. Rev. **93**, 233 (1954).
- [36] Y. Nambu and E. Shrauner, Phys. Rev. **128**, 862 (1962).
- [37] A. Bodek *et al.*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1087 (1973); E. M. Riordan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **33**, 561 (1974); J. S. Poucher *et al.*, Phys. Rev. Lett. **32**, 118 (1974).
- [38] A. Bodek *et al.*, Phys. Rev. **D20**, 1471 (1979).
- [39] W. Melnitchouk and A. W. Thomas, Phys. Lett. **B377**, 11 (1996).
- [40] U. K. Yang and A. Bodek, Phys. Rev. Lett. **82**, 2467 (1999).
- [41] L. W. Whitlow *et al.*, Phys. Lett. **B282**, 475 (1992).
- [42] L. L. Frankfurt and M. I. Strikman, Phys. Rep. **160**, 235 (1988).
- [43] X. Zheng *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. C **70** (2004) 065207 [arXiv:nucl-ex/0405006].
- [44] D. Adams *et al.*, Phys. Lett. B **357**, 248 (1995).
- [45] K. Ackerstaff *et al.*, Phys. Lett. B **404**, 383 (1997).
- [46] P.L. Anthony *et al.*, Phys. Rev. D **54**, 6620 (1996).
- [47] K. Abe *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79**, 26 (1997); Phys. Lett. B **405**, 180 (1997).
- [48] P.L. Anthony *et al.*, Phys. Lett. B **493**, 19 (2000).

- [49] J. Ashman *et al.*, Phys. Lett. B **206**, 364 (1988); J. Ashman *et al.*, Nucl. Phys. B **328**, 1 (1989).
- [50] B. Adeva *et al.*, Phys. Rev. D **60**, 072004 (1999).
- [51] K. Abe *et al.*, Phys. Rev. D **58**, 112003 (1998).
- [52] X. Zheng *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 012004 [arXiv:nucl-ex/0308011].
- [53] S. S. Kamalov, G. Y. Chen, S. N. Yang, D. Drechsel and L. Tiator, Phys. Lett. B **522** (2001) 27 [arXiv:nucl-th/0107017].
- [54] D. Drechsel, S. S. Kamalov and L. Tiator, Eur. Phys. J. A **34** (2007) 69 [arXiv:0710.0306 [nucl-th]].
- [55] P. Lepage, S. Brodsky, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 545, Erratum-ibid. **43** (1979) 1625;
P. Lepage, S. Brodsky, Phys. Rev. **D22** (1980) 2157.
- [56] A. V. Efremov and A. V. Radyushkin, Theor. Math. Phys. **44**, 774 (1981). .
- [57] P. V. Pobylitsa, M. V. Polyakov and M. Strikman, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 022001.
- [58] A. V. Efremov and A. V. Radyushkin, Phys. Lett. B **94**, 245 (1980).
- [59] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Rev. D **22**, 2157 (1980).
- [60] C.E. Carlson, J.L. Poor, Phys. Rev. **D34** (1986) 1478.
- [61] C.E. Carlson, M. Gari, N.G. Stefanis, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1308.
- [62] V. M. Braun, A. Lenz, N. Mahnke and E. Stein, Phys. Rev. D **65** (2002) 074011 [arXiv:hep-ph/0112085].
- [63] V. Braun, R. J. Fries, N. Mahnke and E. Stein, Nucl. Phys. B **589** (2000) 381 [Erratum-ibid. B **607** (2001) 433] [arXiv:hep-ph/0007279].
- [64] I. I. Balitsky, V. M. Braun and A. V. Kolesnichenko, Nucl. Phys. B **312**, 509 (1989).
- [65] A. Lenz, M. Wittmann and E. Stein, Phys. Lett. B **581** (2004) 199 [arXiv:hep-ph/0311082].
- [66] B. L. Ioffe, Nucl. Phys. B **188**, 317 (1981) [Erratum-ibid. B **191**, 591 (1981)].
- [67] A. J. Lenz, arXiv:0708.0633 [hep-ph].
- [68] V. L. Chernyak and I. R. Zhitnitsky, Nucl. Phys. B **246**, 52 (1984).
- [69] I. D. King and C. T. Sachrajda, Nucl. Phys. B **279**, 785 (1987).
- [70] V. L. Chernyak, A. A. Ogloblin and I. R. Zhitnitsky, Z. Phys. C **42**, 569 (1989).
- [71] H. Avakian, S. J. Brodsky, A. Deur and F. Yuan, arXiv:0705.1553 [hep-ph].
- [72] S. J. Brodsky, M. Burkardt and I. Schmidt, Nucl. Phys. B **441** (1995) 197 [arXiv:hep-ph/9401328].
- [73] P. E. Bosted, Phys. Rev. C **51** (1995) 409;
see an update in: E. Tomasi-Gustafsson, F. Lacroix, C. Duterte and G. I. Gakh, Eur. Phys. J. A **24** (2005) 419 [arXiv:nucl-th/0503001].
- [74] O. Gayou *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **88**, 092301 (2002) [arXiv:nucl-ex/0111010].

- [75] M. Dugger *et al.*, Phys. Rev. C **76** (2007) 025211 [arXiv:0705.0816 [hep-ex]].
- [76] P. E. Bosted *et al.*, Phys. Rev. D **49**, 3091 (1994); <http://www.slac.stanford.edu/exp/e136/e136inelastic.F2>.
- [77] M. Gockeler *et al.*, arXiv:0710.2489 [hep-lat].
- [78] V.L. Chernyak and I.R. Zhitnitsky, Nucl. Phys. **B246** (1984) 52.
- [79] K. Passek-Kumericki and G. Peters, paper in preparation.

Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle allen danken, die direkt oder auch nur indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ich danke

- an erster Stelle meinem Betreuer Prof. Dr. V. Braun. Ohne ihn würde diese Arbeit sicher nicht in dieser Form vorliegen. Ich bin dankbar für seinen stets verfügbaren Hilfestellungen, die sich nicht nur auf leere Worthülsen beschränkten, sondern sich in aktivem Tun niederschlugen. Es war mir ein großes Vergnügen, von einem so erfahrenen akademischen Lehrer wissenschaftliche Prinzipien und Methoden zu lernen. Dafür, lieber Volodya, danke ich dir von Herzen!
- Herrn Dr. Dimitry Ivanov. Von dessen fachlichen Ratschlag und Hilfe ich besonders in den Sommermonaten 2007 stark profitiert habe. Vor allem durch die gute und zuverlässige Zusammenarbeit während seines Gastaufenthaltes konnten wir unser zweites Paper zusammen veröffentlichen. Dima, es war mir ein Vergnügen!
- des Weiteren meiner Familie. Sie ermöglichten mir stets ein ungestörtes Studium, frei von finanziellen Belastungen und anderen Störfaktoren. Natürlich nicht zu vergessen, danke ich meinem Bruder Gerhard, der mir immer eine Stütze war, ganz einfach eben nur deshalb, weil er mein Bruder ist.
- meiner geliebten Grossmutter Anna Peters. Zu Beginn meiner Promotion fieberte sie jeden Tag mit mir, wenn ich etwas neues im Begriff war zu entdecken und litt gleichermassen bei Rückschlägen. Sie konnte damals kaum erwarten mich promoviert zu sehen, doch sollte das Schicksal es anders meinen. Im Sommer 2006 verstarb sie nach langer schwerer Krankheit. Ich widme diese Arbeit ihr, denn ich versprach es in ihren letzten Stunden.
- der *Studienstiftung des deutschen Volkes* für ihre bereitwillige finanzielle Unterstützung während meiner Promotion. Ohne sie hätte ich aller Voraussicht nach nicht promovieren können. In diesem Kontext ist vor allem mein Mentor Prof. Dr. L. Arnold zu erwähnen, der mich auf sympathische Weise bei meinen, abseits der Physik beheimateten, VWL-lastigen Interessen rege unterstützte. Vielen Dank!